
J. Ma
CERVELLO
GRANDE
Exlibris

INSTITUCIONES

DE

GEOMETRÍA PRÁCTICA

PARA USO DE LOS JOVENES ARTISTAS.

POR DON BENITO BAILS.

MADRID. MDCCXCV.

EN LA IMPRENTA DE LA VIUDA DE IBARRA.

ADVERTENCIA.

En la Introduccion no me he dilatado quanto me era posible. Sobre que la Arismética por decimales facilita la práctica de la Arismética comun, me pareció natural suponer impuestos en esta á los muchachos, pues á todos se la enseñan en edad muy tierna los Maestros de primeras letras.

INTRODUCCION.

1 Por el sistema de numeracion, ó método de contar que seguimos, el qual está declarado en todos los tratados de Arismética, el valor de los números va creciendo de diez en diez, ó va siendo sucesivamente diez veces mayor á medida que se van apartando de la unidad á mano izquierda; y los mismos números considerados en direccion contraria, esto es desde la unidad á mano derecha, van sucesivamente menguando de diez en diez, ó siendo sucesivamente menores en la misma proporcion decupla, que son mayores conforme se van apartando de la unidad ácia la izquierda. Van pues los números en aumento decuplo de la unidad á la izquierda,

y

y en diminucion decupla desde la unidad á la derecha. Por esta razon se han convenido los Matemáticos en usar de una señal que manifieste el lugar donde se pone la unidad, cuya señal es una coma ó punto, el qual por lo mismo se llama punto divisorio, ó coma divisoria.

2 En virtud de este convenio fundamental, los guarismos de la primer columna á mano derecha despues de la unidad representan décimas partes de la misma unidad, pues son diez veces menores que ella; los guarismos de la segunda columna siguiente representan centésimas, los de la tercera representan milésimas, los de la quarta, quinta, &c. columna representan, cien milésimas, millonésimas, &c. de la unidad principal. Así esta partida, 3584 se lee del modo siguien-

te; ya que la coma ocupa el lugar de la unidad, el 3 representa décimas, el 5 centésimas, el 8 milésimas, &c. partes de la unidad, y por consiguiente la partida propuesta representa diez milésimas partes suyas.

Se ve pues que con el sistema generalmente recibido de numeracion se puede expresar, no solo qualquier número de unidades por grande que sea, sino tambien un número de sus partes por pequeñas que sean, de modo que sean de tal grado de pequeñez, que en la práctica se puedan omitir, sin que de ello resulte ningun error sustancial.

3 En toda cuenta llamamos unidad principal la que se supone dividida en partes menores: quando v. gr. sumo ó resto, &c. varas con pies, pulgadas, &c. las varas son la unidad principal; si una cuenta

ex-

expresa varas, y centésimas partes suyas, tambien la vara es la unidad principal; si en una cuenta donde la unidad principal es v. gr. el peso, hay quatro pesos, y tres milésimas de peso, es constante que las tres milésimas, por muy pequeñas, podrán despreciarse, sin que de aquí resulte ningun error que sea de consideracion.

4 Ademas de esta ventaja proporcionan otra las decimales, y es calcular sin quebrados comunes, de lo que resultan menos embarazosas las cuentas. Por lo que se ha hecho muy comun, é importa conocer el uso de las decimales.

5 Pero primero queden advertidos los principiantes que aquí nos proponemos hacer uso de signos, ó caractéres que hacen, sin perjuicio de su claridad, mas breves las explicaciones.

Se usan, y los usarémos tambien, los caractéres siguientes:

El signo $+$, que se llama *mas*, significa la suma de las cantidades entre las quales se halla, $2+3$ v. gr. señala 5, ó que 2 y 3 son sumados uno con otro. El signo $-$, que se llama *menos*, significa que de dos cantidades entre las quales se halla, la segunda es restada de la primera, $8-3$ v. gr. significa que 3 es restada, ó se ha de restar de 8, y por lo mismo $8-3$ vale 5. Este carácter $\times$, que quiere decir *multiplicado* por, puesto entre dos cantidades, manifiesta que la una está multiplicada por la otra; 4×3 quiere decir que quatro está multiplicado por 3, ó que 4×3 vale 12.

Para expresar que dos cantidades son iguales ponemos entre ellas este signo $=$, que significa es *igual* á, v. gr. $3+5=8$, quiere decir que 3

su-

sumado con 5 vale, ó es igual á 8.

Reduccion de los quebrados comunes á cantidades decimales.

6 Todo número que no contiene sino unidades principales se llama número entero; el que contiene unidades principales, y partes suyas, es número mixto; y el que no contiene sino partes de la unidad se llama fraccion, ó quebrado comun. 3 varas, v. gr. es número entero; 3 varas, y dos tercios, que se escribe así $3\frac{2}{3}$; es un número mixto, porque contiene tres enteros, y dos partes de otro; el número $\frac{2}{3}$ de vara se llama quebrado, y este es quebrado de vara, porque de los tres pies que la componen solo expresa dos. De los dos números del quebrado, el que está debaxo de la linea que los separa se llama de-

no-

nominador, 3 es el denominador del quebrado propuesto, porque da nombre á las partes que supone componen un entero, ó una vara; el número que está encima de la misma linea se llama numerador porque señala quantas partes del entero tiene el quebrado.

7 De lo dicho se puede inferir que las cantidades decimales se substituyen en lugar de los quebrados comunes, con lo que se escusan estos, y salen mas fáciles muchos cálculos de la Arismética. Lo que se consigue reduciendo los quebrados comunes á cantidades decimales, con las quales, expresa la Arismética con la misma facilidad que con los números enteros.

Para esta reduccion se le añaden al numerador quantos ceros se quiera, despues se le parte por el denominador, y el cociente es el

nú-

número decimal al qual queda reducido el quebrado.

8 Quando el denominador no cabe en el numerador, no tiene el número decimal entero alguno, y en su lugar se pone cero. En toda cantidad decimal hay tantos caractéres quantos ceros se han añadido al numerador del quebrado comun. Los exemplos manifestarán todo esto.

1.° Reducir $\frac{1}{4}$ á decimal. Como el denominador 4 no cabe en el numerador 1, el quebrado comun, ó la cantidad decimal á la qual se le podria reducir no vale ningun entero; añado pues dos ceros al numerador; y para reducir á cantidad decimal el quebrado que le iguala, tengo que partir por el denominador 4, el numerador 1 con dos ceros añadidos, el qual expresa el valor de $\frac{100}{4}$, esto es $\frac{100}{4}$ digo pues, ya que el quebrado comun no tiene entero alguno, 1 partido por 4 va-

vale cero, el qual pongo antes de la coma; 1 con el primer cero añadido vale 10, tengo pues que partir 10 por 4; y como $\frac{10}{4}$ igual 2, pongo dos despues de la coma, y queda el residuo 2 á cuyo lado baxo el segundo de los dos ceros que añadí al numerador, luego tengo que partir 20 por 4, y el cociente 5 que sale le pongo á continuacion del 2, y como no queda residuo ninguno el quebrado comun 1 partido por 4, ó despues de añadidos los ceros al numerador $\frac{100}{4}$=0,25 cantidad decimal á la qual queda reducido $\frac{100}{4}$.

2.° Reducir $\frac{1}{2}$ á decimal. Añadiendo dos ceros al numerador es $\frac{100}{2}$= 0,50, cantidad decimal valor de $\frac{1}{2}$.

3.° Reducir $\frac{3}{4}$ á decimal.

Añado dos ceros al numerador y le parto por 4, y saco $\frac{300}{4}$=0,75, cantidad decimal valor del quebrado propuesto.

Re-

4.º Reducir $\frac{11}{80}$ á decimal. Añado tres ceros al numerador, y le parto por 80, saco $\frac{11000}{80} = 0,137$, cantidad decimal valor del quebrado propuesto.

Adicion de las cantidades decimales:

10 Como las decimales se cuentan del mismo modo que los enteros por decenas de la derecha á la izquierda, la regla para sumarlas, ó restarlas, es de todo punto la misma, ocupando las decimales de un mismo nombre una misma columna.

Para sumar pues unas con otras las siguientes decimales 72, 957; 12, 8; 124, 03, ó sacar el valor de 72, 957 + 12, 8 + 124, 03 se sumarán las tres partidas como aquí.

72,

72 ,	957
12 ,	8
124 ,	03
209 ,	787.

Para mayor facilidad se añaden ceros á la cantidad que no tenga el mismo número de columnas decimales que las demas; pongo por caso las tres partidas propuestas, se sumarán despues de añadir dos ceros á la partida segunda, y uno á la tercera, con lo que sumarémos las tres partidas siguientes:

72,957	0,740300
12,800	0,468100
124,030	0,904283
209,787	2,112683
3758,1400	0,00347
2164,9270	2,37500
1791,2063	3,53400
7714,2733	5,91247

Pon-

Pongo por caso en la columna de las décimas del primer exemplo hay un 9, un 8 y un cero, cuya suma es 17, esto es 7 décimas y una unidad; apunto debaxo de ella las 7 décimas, y las diez décimas ó la decena reducida á una unidad, que es lo que vale en la columna de los enteros; la llevo para agregarla á la columna inmediata á la izquierda; digo pues: uno que llevo, y dos son tres y dos son cinco y quatro son nueve, pongo 9 debajo de dicha columna, y para sumar la que se sigue á la izquierda no llevo nada, porque la suma de la antecedente no tiene decena ninguna; digo pues en sumando la columna inmediatamente siguiente á la izquierda: siete y uno son ocho y dos son diez, pongo pues cero debaxo, y la decena que hay en su suma convertida á unidad la agrego al guarismo uno que

es-

está á la izquierda, cuyo uno sumado con el uno que está despues del dos hace dos que pongo debaxo.

11 Los ceros que se añadan á una cantidad decimal no mudan su valor, porque si bien despues de añadirle los ceros tiene mayor número de partes, tambien las tiene menores en la misma proporcion que ha crecido su número v. gr. 10 añadiéndole un cero expresa 100 partes, pero son centésimas, esto es, diez veces menores que las décimas.

Sustraccion de las decimales.

12 Para restar una decimal de otra se practica de todo punto lo mismo que para restar un entero de otro; pero para escusar tropiezos, se procura que en ambas partidas haya un mismo número de figuras decimales, añadiendo los ceros

ros

ros necesarios á la que tiene menos.

He de restar de $\quad 947,3$

$\qquad\qquad\qquad\quad 3,23$

Añado á la partida de arriba un cero, que le falta para que tenga el mismo número de decimales que la partida de abaxo; voy á la operacion restando 3 de 0; y como esto no se puede, le añado al cero con el pensamiento una unidad que tomo del 3 que tiene á su lado, el qual señalo con un punto para acordarme que ha de valer una unidad menos, la qual vale 10, y quedan 7 que pongo debaxo. Prosigo restando 2 de 3, del qual me dice el punto puesto encima que no vale sino 2; restando 2 de abaxo de 2 de arriba, queda cero; continúo la operacion restando 3 de 7; quedan 4, que pongo debaxo. Como no hay número ninguno que restar del 9, y del 4 de arriba, se quedan como están, y los pongo debaxo. Es, pues, la resta 944,07.

De. . . .	947,30	7,34
he de restar	3,23	1,70
	944,07	5,64

Empiezo la operacion restando o de 4, que pongo debaxo: para proseguir deberia restar 7 de 3; y como no se puede, añado al 3 una unidad del 7, que tiene á su lado, el qual por esto señalo con un punto, y con la unidad añadida, que en el 7 vale 10, respecto del 3 vale ahora este 13; y restando 7 de 13, resta 6 que pongo debaxo: finalmente restando 1, no de 7, sino de 6, que ahora no vale mas como lo señala el punto, resta 5 que pongo debaxo.

Mul-

Multiplicacion de las decimales.

12 Las decimales se multiplican unas por otras, sin hacer caso algùno de la coma divisoria; pero despues de hecha la multiplicacion, se separan á mano derecha á continuacion de la coma, tantas figuras decimales quantas hay en ambos factores, que así se llaman el multiplicando y el multiplicador.

He de multiplicar	54,23
por	8,3
	162 69
	4338 4
	450,109

Multiplico 5423 por 83, saco el producto 450109; y como hay dos decimales en uno de los factores, que es el multiplicando, y una en el otro factor, que es el multiplicador, separo tres figuras á la derecha del producto hallado despues de la coma, el qual con esto es 450,109,

He de multiplicar	0,12
por	0,3
	36

Multiplico 12 por 3, sale el producto 36: como en este caso se debian separar tres figuras decimales, podria haber alguna duda; pero el que tenga presente la razon dada en esta regla en el exemplo último, echará de ver que es preciso añadir, como se vé en el producto, un o entre 36 y la coma. La razon es, que si se hubiese de multiplicar 0,12 por 3, el producto seria patentemente 0,36; pero como he de multiplicar por 0,3, esto es por un número diez veces menor que 3, no pue-

puede menos de salir un producto diez veces menor que 0,36, el qual por lo mismo ha de expresar milésimas, cuya condicion se cumplió con escribir 0,36; pues el 3 que en 0,36 expresa décimas, en 0,036 expresa centésimas.

13 Antes de explicar como se dividen unas por otras las decimales, diré como se hace la division de un entero por otro.

Por de contado se sienta la cantidad que se ha de dividir, y á su derecha la que es su divisor; se tira entre los dos guarismos una linea de arriba abaxo, debaxo de cuya linea se tira debaxo del divisor ácia la derecha otra linea; y debaxo de ella se sientan las figuras que da la division á medida que van saliendo. Despues se mira quantas veces el divisor cabe en la primera ó dos primeras figuras del dividendo á mano izquierda, si el divisor no tiene mas de dos; si tuviera mas, se miraria quantas veces caben todas en otras tantas del dividendo, ó una mas. Despues se multiplica por el cociente que salió; su producto se resta del dividendo, al lado de cuya resta, si la hay, se baxa la figura siguiente del dividendo, separándola de las que se la siguen con una coma: la figura baxada con dicha resta ó sola, si no hubo resta alguna, compone el segundo dividendo parcial, con el qual se ha de practicar lo mismo que con el primero. Se prosigue á este tenor hasta que no quede en el dividendo mas figura que baxar, y queda concluida la operacion.

Todo esto presupuesto, digamos como se parte 978 por 6, ó busquemos quantas veces cabe 6 en 978.

9,7,8, | 6
6   163

37
36

18
18

00

Despues de sentadas las partidas como aquí se vé, tocaria saber quantas veces 6 cabe en el dividendo; pero como esto es algo dificultoso, sirve de primer dividendo solo el 9, y decimos: ¿en 9 quantas veces 6? como cabe una vez no mas, siento uno al cociente. Multiplico el divisor 6 por 1, el producto 6 le resto del dividendo 9, y queda 3.

Al lado de la resta 3 baxo el guarismo 7 del dividendo, y le separo con una coma por manera que el segundo dividendo es 37. Digo, pues: ¿en 37 quantas veces 6? cabe 6 veces; sentando por lo mismo 6 al cociente despues del 1, multiplico por el último cociente 6 el divisor 6, el producto 36 le resto del dividendo, y resta 1.

Al lado de esta resta 1 baxo el último guarismo 8 del dividendo, mediante lo qual el tercer y último dividendo es 18. Digo primero: ¿en 18 quantas veces 6? cabe 3 veces; pongo, pues, 3 al cociente, multiplico por último el divisor por el cociente 3, resto el producto 18 del tercer dividendo 18; y como no queda nada, saco que el 6 cabe 163 veces en 978, ó que partido por 6=163.

14 Ahora diré como se hace la division de las cantidades decimales, una por otra.

Quando ocurre partir una decimal por otra, se ponen tambien á continuacion de la que tiene menos decimales tantos ceros, quantos se necesitan para que en ambas partidas, el dividendo y el divisor, haya igual número de figuras decimales, se hace la division del mismo modo que si fuesen números enteros: el cociente que sale es el verdadero.

He de partir 12,52 por 4,3.

$$\begin{array}{l|l} \text{Parto pues } 12\,5{,}2 & 430 \\ \cline{2-2} \quad\quad\quad\quad\;\; 8.6\,0 & 2\tfrac{392}{430} \\ \cline{1-1} \quad\quad\quad\quad\;\; 3\,9\,2 & \end{array}$$

Saco el cociente 2, y la resta 392, quiero decir que el cociente es $2\frac{392}{430}$.

Pero como la principal utilidad del cálculo por decimales es excusar los quebrados comunes, en vez de escribir la resta 392 á manera de quebrabrado comun , como está figurado, prosigo la operacion como aquí se vé.

Despues de sacar el cociente entero 2 , añado un cero á la resta 392 ; prosigo partiendo por 430 , y pongo el cociente nuevo que sale, pero primero señalo el lugar de las unidades enteras con poner la coma despues del 2 , y el 9 expresará décimas no mas : hecha la multiplicacion y la sustraccion, prosigo la operacion para reducir á cantidad decimal el quebrado comun 392 partido por 430. Lo que prosigo quanto me parece ; y ciñéndome en este exemplo á quatro figuras decimales , saco el cociente 2,9116 , que contiene decimales, con lo que el cociente no discrepa del verdadero , ni siquiera, una diezmilésima parte, pues no le puedo añadir , ni quitar una unidad , sin que sea mayor ó menor de lo que corresponde.

Exem-

```
Exemplo.  1252  |430
           860  -------
          ----   2,9116
          3920
          3870
          ----
           500
           430
           ---
           700
           430
          ----
          2700
          2580
          ----
           120
```

Si se me ofreciese partir 7 por 0,4589, se le añadirian al 7 quatro ceros decimales, con lo que se habria de partir 70000 por 4583; y hecha la division, quedaria el cociente 15,2538.

Quan-

7000,0	| 4589
4589	15,2538
24110	
22945	
11650	
9178	
24720	
22945	
17750	
13767	
39830	
36712	
3118	

15 Quando se muda la coma divisoria de modo que esté uno, dos, tres, &c. lugares mas á la derecha que

que antes, la cantidad decimal es diez, ciento, mil, &c. veces mayor de lo que era: lo contrario sucede, si se traslada uno, dos, tres, &c. lugares á la izquierda.

16 Una cantidad decimal nada se altera, aunque al último se le añadan muchos ceros; porque si bien la cantidad decimal tiene entonces mas partes, las tiene tambien menores en la misma proporcion.

Reduccion de las medidas, pesos, &c. á partes decimales.

17 Supongo que quiero reducir 3 varas, 2 pies, 8 pulgadas, 7 lineas á decimales de vara. Observo que la vara tiene 432 lineas, ó 864 medias lineas, pues en la vara hay 3 pies; en cada pie, 12 pulgadas; en cada pulgada, 12 lineas.

Reduzco los 2 pies, 8 pulgadas,

7 lineas todo á lineas, y sale 391 lineas, ó $\frac{391}{432}$ de vara. Transformo este quebrado en decimal hasta las milésimas v. g. y salen 0,905, de donde infiero que el número propuesto vale 3 varas, y 0,905 milésimas de vara.

Para reducir 8 pesos, 4 reales, 5 maravedises á decimales de peso, considero que pues el peso vale 15 rs., y el real 34 mrs., un peso vale 510 mrs. ó 1020 medios mrs., y que por consiguiente la decimal llega hasta las diezmilésimas.

Reduzco los 4 rs. y 5 mrs. á maravedises, y salen 141 partidos por 510 de peso. Reduzco esta cantidad decimal hasta las diezmilésimas, y hallo que los 8 pesos, 4 rs. y 5 mrs. valen 8 pesos, y 0,2764 de peso.

Declaremos ahora como se halla el valor de una cantidad decimal de medida, de peso, &c. como v. g.

v. g. manifestar quantos reales y maravedises valen 0,2764 de peso.

Para esto multiplicarémos la cantidad decimal 0,2764 por el número que expresa quantas veces la unidad, en que deseo determinar el valor de la decimal, cabe en la unidad á la qual esta se refiere, y dividir el producto por el denominador. Quiero decir, que para valuar en reales la decimal 0,2764, basta multiplicar por 15, porque el peso tiene 15 rs. Executo, pues, la multiplicacion de 0,2764 por 15, sale el producto 4,1460; esto es, el entero 4, que vale 4 rs., y 0,1464 de real. Para valuar esta última cantidad, la multiplico por 34, porque 34 mrs. componen un real; saco el producto 4,9640, esto es, 4 mrs. 0,9640 de maravedí, cantidad de poco momento.

18 Siempre que se omita el último

gua-

guarismo de una decimal, si pasa de 5, debe añadirse una unidad al último guarismo que queda.

Quando hallamos poco ha que las 0,2264 de peso valen 4 rs. 4 mrs. y 0,9640 de maravedí; en lugar de 4 mrs. podemos poner 5 mrs., porque la decimal 0,9640 se acerca muchísimo al valor de un maravedí.

Lo que hemos dicho sobre el modo de hallar el valor de las cantidades decimales de medida, peso, &c. manifiesta quan socorridas son para calcular los números denominados; esto es, los que contienen unidades de diferente especie, como pesos, reales, maravedises, &c., varas, pies, pulgadas, &c.

Todo el artificio consiste en reducir á decimales, como lo hemos hecho (11), los números denominados que se ha de calcular, cuyo cálculo es facilísimo despues de

he-

hecha su reduccion, como lo dirán los casos siguientes.

Sumar números denominados.

19 Supongo que se han de sumar unos con otros los quatro números denominados siguientes:

227	p.	14	rs.	8	mrs.
184	.	11	.	11	
2545	.	13	.	15	
17	.	10	.	7	

Las quatro partidas reducidas á decimales se transforman en las siguientes, que son las que ahora se han de sumar.

227,949
184,754 | 9
2549,896
17,680

Cuya suma es 2980,280

En estas aplicaciones importa tener muy presente que la reduccion á decimales debe continuarse dos figuras ó una por lo menos mas de las que se desea lleve la suma ó el último resultado; porque si acaso la figura decimal que se siguiese á la última valiera mas de 5, seria necesario añadirle una unidad á la última, donde no, se erraría el cálculo. En el caso propuesto v. g. la segunda partida reducida á decimales hasta 4 figuras, es 148,7549. Si nos hubiésemos contentado con sacar tres figuras decimales no mas, no hubiebieramos sabido que el 4 habia de ser un 5, porque el número desechado es 9, el qual vale cerca de la unidad, y entonces no hubiera salido cabal la suma y el error hubiera caido en los maravedises.

Basta este exemplo para que no pueda quedar duda alguna sobre el modo de reducir á decimales los números denominados, y calcularlos como se calculan los enteros.

Sumaré las quatro partidas sentadas. Hago desde luego con ellas la reduccion correspondiente, mediante la qual se convierten en

227	p.	949	
184	.	754	9
2549	.	896	
17	.	680	
2980	.	280	

 Ha-

Hago la adicion y sale la suma 2980; esto es, 2980 pesos y 0,280 milésimas de peso. Para saber los reales y maravedises que vale la decimal 0,280 de peso, la multiplico por 15, saco el entero 4 reales y la decimal 0,200 de real que multiplico por 34, saco el producto 6,800; esto es 6 maravedises, y 0,800 de maravedí, cantidad de poco momento.

Si hubiéramos de sumar 4 partidas de números denominados que, despues de reducidos á decimales fuesen las quatro partidas siguientes.

54 v.	2 p.	3 p.	9 l.
12 .	1 .	4 .	11
9 .	2 .	11 .	11
8 .	2 .	9 .	10

54	v.	771
12	.	470
9	.	998
8	.	940
86	.	179

Si multiplicamos esta decimal por 3, número de pies que hay en la vara saco 0,537, que no llega á un pie; de donde infiero que no hay pies en la suma: multiplico la decimal 0,537 por 12 para sacar las pulgadas, y saco 6 pulgadas y 0,444 de pulgada.

Multiplico esta decimal por 12 y saco 5 lineas y 0,328 de linea, cantidad despreciable.

He de inferir por consiguiente que la suma es 86 varas, 0 pies, 6 pulgadas, 5 lineas.

Sustraccion de los números denominados.

20 Se me propone restar 75 pesos, 10 reales y 20 mrs. de 143 pesos, 14 rs. y 8 mrs.

Los dos números despues de transformados en decimales son los siguientes:

143	p.	949
75	.	706
68	.	243

La decimal 0,243 multiplicada por 15 dá 3 reales y 0,645 de real: esta última decimal multiplicada por 34 dá 21 mrs. y 0,930, ó añadiendo una unidad al último guarismo de 21, 22 mrs.

Multiplicacion de los números denominados.

21 Hemos de multiplicar

	4 v.	2 p.	8 p.
Por.....	2 p.	2 rs.	4 mrs.

Estos factores despues de hecha la reduccion correspondiente se convierten en

$$
\begin{array}{r}
4{,}889 \\
2{,}208 \\
\hline
39\,112 \\
977\,8 \\
9778 \\
\hline
10{,}794\,912
\end{array}
$$

Multiplico la decimal por 15, saco 11 reales y 0,923680 de real;

 mul-

multiplico esta decimal por 34, salen 31 maravedis y 0,405020 de maravedí; por manera que el producto es 10 pesos, 11 rs., 31 mrs.

Si he de multiplicar

	10 p.	3 rs.	4 mrs.
Por.......	3 .	2 .	6

Haré la correspondiente reduccion y quedarán convertidos los dos factores en

$$
\begin{array}{r}
10{,}208 \\
3{,}145 \\
\hline
51\,040 \\
408\,32 \\
1020\,8 \\
30624 \\
\hline
32{,}104\,160
\end{array}
$$

Es, pues, el producto 32 pesos y 0,104160 de peso. Multipliplicada esta decimal por 15 da 1 real y 0,562400 de real; multiplico esta última por 34 y saco 19 maravedises.

Dividir números denominados reducidos á decimales.

22 Se me ofrece partir 642 pesos, 12 reales y 8 maravedises por 55 varas, 3 quartas ó $55\frac{3}{4}$ de varas.

Hago con las dos partidas la correspondiente reduccion, con lo que el dividendo se convierte en 642,816 y el divisor en 55,750. Concluida la division salen al cociente 11 pesos y 0.430 de peso: multiplico esta decimal por 34 y salen 32 mrs.

Ex-

Extraccion de la raiz quadrada.

23 Llamamos número quadrado el producto de un número por el mismo, como 5 multiplicado por 5 dá 25; 49 es el quadrado de 7.

Para quadrar un número basta pues multiplicarle por el mismo; pero para hallar la raiz quadrada hay un poco mas de trabajo: la tabla siguiente tiene los nueve guarismos con la raiz quadrada de cada uno.

1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	2	3	4	5	6	7	8	9

La raiz quadrada de 36 está debaxo de él. La raiz quadrada de 72 es 8 en número entero; porque como 72 está entre sesenta y qua-

quatro y ochenta y uno, su raiz estará entre las raices de estos dos números; esto es entre 8 y 9, es pues 8 y un quebrado, del qual no podemos hallar á la verdad el valor cabal; pero está á nuestro arbitrio aproxîmarnos ó acercarnos á él quanto queramos, conforme dirémos despues.

24 Números hay que no resultan de otro multiplicado por el mismo, y que por consiguiente no tienen su raiz quadrada cabal; ésta se señala entonces con este signo $\sqrt{}$ particular puesto delante del número, v. g. la raiz quadrada de 25 es 5; pero la raiz quadrada de 28 se señala así $\sqrt{28}$.

Para extraer la raiz quadrada de un número se le parte de la derecha á la izquierda en periodos de dos guarismos cada uno, de lo que puede suceder, y sucede alguna vez que el primer periodo á mano derecha no tenga sino un guarismo.

25 Suponiendo, pues, que 2916 sea el número cuya raiz quadrada he de extraer, le parto en los periodos que he dicho, y los separo con una coma segun se vé.

29,16, miro despues qual es el mayor quadrado contenido en el primer periodo 29 á mano izquierda, veo que es 25, saco su raiz 5 y la escribo al lado del número propuesto, tirando primero de arriba abaxo una linea.

Despues quadro la raiz escrita 5, resto de 29 su quadrado 25, hecha la sustraccion queda 4, á cuyo lado baxo el otro periodo 16.

Debaxo de la linea sobre la qual está el 5 de la raiz pongo su duplo 10, por el qual he de partir 416: hago con efecto la division de de 416 por 10, hallo el cociente 4 que siento al lado del 5 puesto en la raiz. Pero ántes de sentar este quatro he de probar si es bueno, para cuya comprobacion multiplico el divisor 10 por el 4, con el producto 40 sumo el quadrado del 4 escribiéndole una columna mas ácia la derecha, y porque de la suma 416 se puede restar la parte 416, sobre la qual he operado del quadrado, es señal que dicho 4 sirve, y porque haciendo la sustraccion no resta nada, es prueba de ser con efecto 54 la raiz quadrada de 2916.

2916	54
25	10
416	
416	
000	

25 Repárese que casos hay en que el cociente hallado por este camino es mayor de lo que conviene y debe desecharse tomando otro que sea una unidad menor, quando la suma de su producto y de su quadrado escrito una columna mas á mano derecha no se puede restar como se resta en el caso presente.

Otro exemplo.

26 Se ha de extraer la raiz quadrada de 7569 escrito el número y dividido en periodos de dos guarismos cada uno, el primero es 75, en el qual el mayor quadrado es 64, cuya raiz es 8, póngole, pues, en la raiz, su quadrado 64 réstole del primer periodo 75 y resta 11, que pongo debaxo de 75, y al lado de 11 baxo al guarismo, 69 del segundo periodo que separé al principio.

Des-

Despues del 9 de 1169 pongo una coma para separar el último guarismo 9, cuya separacion da á entender que de todos los guarismos del segundo periodo, solo el 6 entra en el dividendo, por lo que el dividendo es ahora 116 y el divisor es 16 duplo del guarismo puesto en la raiz.

75,69	87
64	16
116,9	
116 9	
000 0	

Me toca, pues, ahora partir 116 por 16, con lo que el 1 del divisor corresponde á 11 del dividendo.

Haciendo, pues, la division de 116

por 16 hallo el cociente 7, que escribo en la raiz despues del 8.

Para probar si el 7 es bueno multiplico el divisor 16 por 7 al producto 112, sumo conforme he dicho una columna mas á la derecha el quadrado 49 de 7 y saco 1169, infiero que el 7 es bueno, y como haciendo la sustraccion no queda nada, es prueba de que 87 es la raiz quadrada de 7569.

27 Téngase muy presente que quando al hacer la division el duplo de los guarismos puestos en la raiz no cupiere en la parte que queda á la izquierda, no por esto se deberá echar mano del guarismo separado; pero se pondrá cero en la raiz. Si al contrario el divisor duplo del número puesto en la raiz cupiese mas de 9 veces en dicha parte, no por eso se pondrá mas de 9 en la raiz.

El

El que estuviere bien enterado de lo que acabamos de decir de la extraccion de la raiz quadrada de las cantidades que no tienen mas de quatro guarismos, se impondrá fácilmente en lo que habrá de practicar quando el quadrado propuesto fuere un número mayor. Porque despues de hallados los dos primeros guarismos de la raiz por el camino enseñado, por el mismo se hallará tambien el tercero, aplicando para hallarle todo quanto hemos dicho del primero para hallar el segundo.

Despues de hallados los tres primeros guarismos, si hubiere de haber otro, se aplicará para hallar el quarto lo mismo que se hubiere practicado con los dos primeros para hallar el tercero.

Pero, para mayor seguridad, conviene desde luego partir el número propuesto en periodos de dos guarismos cada uno de la derecha á la izquierda, y podrá suceder que el último á la izquierda tenga solo un guarismo, lo que nada altera el método.

28 Quando el número propuesto no es un quadrado cabal, queda una resta al fin de la operacion, y la raiz quadrada que sale es la raiz del mayor quadrado que hay en el número propuesto; entonces no es posible sacar cabal la raiz quadrada; pero se puede hallar prosiguiendo la operacion una raiz tan próxîma á la verdadera, quanto se quiera, y tal que levantando al quadrado esta raiz aproxîmada, sale un número que discrepa del verdadero una cantidad tan corta ó despreciable, quanto se quiera.

Para esta aproxîmacion sirven las

las decimales. Se supone á continuacion del número propuesto un número de ceros duplo de las decimales que se quiere lleve la raiz, quiero decir, quatro ceros, si la raiz ha de llevar dos figuras decimales &c. Despues de hecha esta preparacion se hace la extraccion de la raiz por el método enseñado, separando con una coma á la derecha de la raiz un número de figuras decimales igual á la mitad del número de ceros añadidos al número cuya raiz me he propuesto extraer.

29 Se me pide la raiz quadrada de 87567 con diferencia de menos de una milésima, esto es, tan aproxîmada á la verdadera que no discrepe de ella ni siquiera una milésima.

Para expresar milésimas se necesitan tres decimales, luego hemos de añadir seis ceros al quadrado 87567; por lo mismo he de sacar la raiz quadrada de............ 8756700000 0.

```
8,75,67,00,00,00 | 295917
4
―――
47,5
44 1
――――――
 3 46,7
 2 92 5
――――――――
   54 20,0
   53 18 1
――――――――――
     1 01 90,0
       59 18 1
――――――――――
       42 71 90,0
       41 42 78 9
――――――――――――
        1 29 11 1
```

Haciendo la operacion del mismo modo que en los exemplos antecedentes, hallo que la raiz quadrada, con diferencia de menos una unidad es el número 295917, cuya raiz es la del número............... 87567000000; pero como se me pide la de 87567 ó de.............. 87567000000, separo en la raiz un número de guarismos igual á la mitad de los ceros que añadí al quadrado, mediante lo qual saco 295,917, raiz quadrada de 87567, con diferencia de menos de una milésima.

Extraccion de la raiz cúbica.

30 Llamamos cubo de un número el producto de su quadrado por su raiz: 27 v. g. es el cubo de 3, porque es el producto de 9 quadrado de tres por el mismo 3.

Para formar el cubo de un número no se necesita método alguno, basta la multiplicacion; pero para extraer la raiz cúbica es necesario valerse de algun método. En la tabla siguiente están los nueve guarismos con el cubo de cada uno, y debaxò de cada uno de ellos su raiz cúbica.

1	8	27	64	125	216	343	512	729
1	2	3	4	5	6	7	8	9

La raiz cúbica en números enteros de todo número que esté entre medias de dos números de la primer linea de la tabla donde están los cubos de los nueve guarismos, están entre medias de los dos números correspondientes de la segunda linea.

Como 30 v. g. está entre los números 27 y 64 de la primer linea,

nea, su raiz cúbica está entre 4 y 3 números del segundo renglon correspondientes á los otros dos del primero.

Un número cuya raiz cúbica se ha de extraer se parte primero en periodos de tres guarismos cada uno de la derecha á la izquierda, bien que puede suceder como en el caso actual que el primer periodo de la izquierda tenga menos de los tres guarismos.

Primer exemplo.

79,5 07	43 raiz.
64	
15 5,07	
79 5 07	
00 0 00	

Miro primero qual es el cubo mayor del primer periodo 79, es 64; saco su raiz cúbica que es 4 y la escribo al lado del número propuesto despues de la linea divisoria.

Levanto el 4 al cubo que es 64, le resto de 79, quedan 15, á cuyo lado baxo el segundo periodo 507, es pues 15507 la partida con la qual he de continuar la operacion. Formo primero el quadrado del 4 puesto á la raiz, le triplo y saco 48; por 48 parto 155 y saco el cociente 3 que escribo al lado del número 4 puesto en la raiz: para comprobar este 3 y hallar la resta si la hay es muy fácil lograrlo. No hay mas que cubicar sobre la marcha 43, con cuya mira multiplicamos 43 por 43; su producto 1849 le multiplicamos por 43, de cuya multiplicacion sale por últitimo 79507. Es, pues, 43 la raiz cúbica cabal de 79507.

Exemplo segundo.

596,947,688	842
512	
849,47	
592 704	
4 2436,88	
596947688	
000000000	

Se ha de sacar la raiz cúbica de 596947688.

Empiezo dividiéndole con comas de la derecha á la izquierda en periodos de tres guarismos cada uno.

Aho-

Ahora busco el cubo mayor que hay en el primer periodo de la izquierda 596 es 512, cuya raiz cúbica es 8 cubo; pues 8 y su cubo 512 le resto de 596, queda la resta 84, al lado de 84 baxo 947, sale 84947, de cuya partida separo los dos últimos guarismos 47.

Saco el triplo del quadrado del número 8 puesto en la raiz, cuyo triplo es 192, por el qual he de dividir 849, saco el cociente 4 y le pongo en la raiz.

Para comprobar esta raiz, y ver al mismo tiempo lo que resta, cubico 84 y resto el producto 592704 del número 596947 y queda la resta 4243, á su lado baxo el periodo 688, y cuyos dos últimos guarismos 88 separo, y parto el número 42436 por el triplo del quadrado de 84; esto es por 21168, saco el cociente 2 y le pon-

pongo en la raiz al lado de 48.

Para comprobar la raiz 842 y sacar la resta si la hay, cubico 842, y resto el producto 596947688 del número propuesto.................. 596947688; como no queda resta alguna infiero que 842 es la raiz cúbica de 596947688.

Manifiestan los dos exemplos propuestos que en la extraccion de la raiz cúbica para comprobar el número escrito á la raiz quando es el último, se cubica todo lo puesto en la raiz, y si el cubo puede restarse del número propuesto, es bueno; quando hay resta al fin de la operacion se concluye sacando la aproxîmacion de la raiz, como voy luego á decir.

31 Prevengo primero que en el discurso de esta operacion nunca se puede poner mas de 9 á la raiz; que si el guarismo puesto á la

raiz

raiz es muy grande no se podrá hacer la sustraccion, por cuyo motivo se quitará sucesivamente una, dos, tres, &c. unidades, hasta que la sustraccion se pueda practicar.

32 Quando el número propuesto no es un cubo cabal, la raiz que se saca no es mas que aproxîmada, y pocas veces basta sacarla en números enteros, para cuya aproxîmacion son muy socorridas las decimales, bien que ni aun con ellas se puede sacar cabal la raiz.

Para acercarse quanto uno quiera á la raiz cúbica de un cubo no cabal, se le han de añadir tres veces tantos ceros, quantas decimales se quieren en la raiz. Despues de cuya preparacion se hará la extraccion de la raiz cúbica por el mismo método que en los exemplos antecedentes, y concluida que es-

esté se separarán con una coma en la raiz; á la derecha las figuras decimales que se quiera.

Quiero sacar por aproxîmacion la raiz cúbica de 8755 con diferencia de menos de una centésima. Para que la raiz lleve centésimas, ó, lo que es lo mismo, dos decimales, es preciso que el número propuesto ó el cubo lleve seis, es pues necesario añadir seis ceros al número 8755.

Luego el empeño se reduce á sacar la raiz cúbica de 8755000000.

8,755,000,000 | 2061
8

07,55
12
8000

7550,00
1200
8741816

131840,00
127308
8754552981

447019

Por lo dicho antes parto este número en periodos de tres guarismos cada uno de la derecha á la izquierda. Saco la raiz cúbica del último periodo 8, es 2, le pongo á la raiz; cubico 2, el producducto le resto de 8, queda la resta 0, á cuyo lado baxo el periodo 755 y separo los dos últimos guarismos 55.

Debajo del 7 que queda pongo 12 triplo del quadrado de la raiz, parto 7 por 12, saco el cociente 0, pongo pues 0 á la raiz.

Cubico la raiz 20, me sale 8000 que resto de 8755, queda la resta 755. A su lado baxo el periodo 000, separando dos figuras á la derecha, debaxo de la partida restante 7550 pongo 1200, triplo del quadrado de la raiz 20, y parto 7550 por 1200, saco el cociente 6, que pongo á la raiz.

Cubico la raiz 206, y el producto le resto de 8755000, queda la resta 13184, á cuyo lado baxo el último periodo 000, separando las dos últimas figuras. Debajo de la partida restante 131840 pon-

pongo 127308, triplo del quadrado de la raiz hallada 206, parto 131840 por 127308, sale 1 al cociente y le pongo á continuacion de 206. Cubico 2061, y restando de 8755,000000 el producto......... 8754552981, queda la resta....... 447017.

Por consiguiente la raiz cúbica aproxîmada de 8755000000 es 2016; luego la de 8755000000 es 20,61, porque todo cubo tiene tres veces tantas decimales quantas su raiz.

PRO-

PRÓLOGO.

El objeto de todas las investigaciones matemáticas ha sido desde su orígen medir la extension, cuya indispensable operacion han promovido y facilitado los matemáticos de todas las edades y naciones. Los ha habido aun tan deseosos de ensanchar en este ramo los límites de la ciencia, que se han dedicado á ahorrar á los demas mucha parte del inmenso trabajo á que obliga operacion de tanta utilidad para el género humano, los quales han publicado separadamente lo que sobre el asunto tiene discurrido la penetracion de los mayores teóricos. Lo mas fundamental y necesario lo incluyo en este tratadito todo práctico, precedido con nombre de introduccion, de las operaciones de la arismética; viniéndose claro á la vista que para medir la extension es indispensable contar quantas veces caben en sus dimensiones las medidas. Sirven, pues, de introduccion á lo que digo de la práctica de medir los cuerpos unos principios de arismética tratada por un término el mas fácil que hasta ahora he conocido. Las cuentas, las operaciones las manda la materia; no la inventa el que la trata.

TRA-

TRATADO

DE LA MEDICION DE LOS CUERPOS.

Definiciones.

33 Punto es lo que no tiene Fig.
partes, por lo que es considerado sin extension, y como indivisible.

34 Llamamos linea una extension que no tiene mas que longitud ó largo. Hay dos especies de lineas; la recta, y la curva: linea recta es la 1.
distancia mas breve entre dos puntos. Como la *AB*, pues de uno á otro punto la linea mas breve que se puede tirar es la *AB*.

35 Quando la linea no es la mas breve distancia entre dos puntos, se llama linea curva. Tal es la linea 2.
de la *fig.* 2.

36 Dos lineas rectas se llaman pa-

Fig. ralelas una á otra, quando por mas que se prolonguen nunca se encuentran. Como las dos lineas de
3. la figura que cito, que tambien se llaman equidistantes, por lo mismo que prolongadas no se pueden encontrar.

37 Quando una linea recta está derecha sobre otra, de modo, que no se inclina ni á uno ni á otro lado y hace en ambos ángulos iguales, éstos ángulos se llaman rectos, y las lineas se llaman per-
4. pendiculares una á otra.

38 Si dos lineas están inclinadas una á otra, de modo, que prosiguiéndose la una de ellas ó las dos concurran en un punto, forman en su punto de concurso un ángulo que se llama ángulo plano, ó rectilíneo, si las dos lineas son rectas. Para nombrar un ángulo se le señala con una letra, poniendo igualmente una en

en cada extremo de las dos lineas Fig.
que le forman, y la letra del ángulo se nombra siempre la segunda.

39 Para nombrar el ángulo que las dos lineas *BA*, *CA* forman en su punto de concurso *A*, se dice el ángulo *BAC*. Esta atencion es muy 5.
del caso, particularmente quando son muchas las lineas que concurren en un mismo punto.

Así para nombrar el ángulo formado por las dos lineas *CB*, *DB*, dirémos el ángulo *CBD*, porque si nos contentáramos con nombrar el ángulo diciendo el ángulo *B*, no se sabria si queriamos nombrar el ángulo *ABC* ó el ángu- 6.
lo *CBD*.

40 Llamamos figura una superficie 7.
ó un espacio largo y ancho cerrado por todos lados.

Una linea curva puede formar ella sola una figura; pero

Fig. las lineas rectas han de ser tres por
lo menos para formar una figura.

41 La figura de tres lineas
8. se llama triángulo, y las lineas que
la terminan se llaman lados del triángulo. Por lo que, figuras rectilineas se llaman las que son terminadas ó cerradas por lineas rectas; figuras curvilineas, las que son terminadas por lineas curvas, y figuras mixtilineas las que son terminadas por lineas rectas y curvas á un tiempo.

Las figuras de tres lados, que se llaman triángulos, las distinguimos unas de otras como sigue.

9. 42 1.° Quando los tres lados son
desiguales, el triángulo se llama escaleno.

10. 43 2.° Si los tres lados son iguales, el triángulo se llama equilátero.

11. 44 3.° Si solamente dos lados
son iguales, como los lados *AF*, *AC*, el triángulo se llama isosceles.

Si

45 4.º Si el triángulo tiene un Fig.
ángulo recto, como el ángulo *A*, se
le llama triángulo rectángulo. 12.

46 Todas las figuras de quatro
lados se llaman quadriláteros, y se
distinguen tambien de varios modos.

47 1.º Quando los quatro lados 13.
son iguales, y rectos los quatro ángulos, la figura se llama quadrado;
pero si ningun ángulo es recto, se
llama rombo. 14.

48 2.º Quando solos los lados
opuestos son iguales, y rectos los
ángulos, se llama rectángulo; 15.
pero si los ángulos no son rectos,
se le llama romboide. 16.

49 Estas quatro figuras se llaman paralelógramos, porque tienen paralelos sus lados opuestos; esto es, cada uno equidistante ó á igual distancia del otro; pero todas las demas figuras de quatro lados se llaman trapecios. 17.

Fig. 18. 50 El círculo es una figura plana, terminada por una linea curva llamada circunferencia, en la qual todas las lineas rectas tiradas desde cierto punto dentro de la figura, llamado el centro, á su circunferencia, son iguales.

AHBGA es un círculo.

Su centro es el punto *C*.

51 El diámetro del círculo es una linea recta tirada por el centro, la qual por cada extremo remata en la circunferencia, y divide el círculo en dos partes iguales llamada cada una semicírculo. La mitad del diámetro se llama radio, *AC* es un radio.

52 Toda circunferencia se supone estar dividida en 360 partes iguales llamadas grados, cada grado en 60 partes iguales llamadas minutos, cada minuto en 60 partes iguales llamadas segundos. Cada

parte de la circunferencia se llama Fig.
arco, como *DGE*.

53 Llámase cuerda del arco una linea recta tirada desde, un extremo del arco al otro; ó una linea recta que divide el círculo en dos 18.
partes desiguales, llamadas segmentos, se llaman cuerda, como *DE*.

54 Si la cuerda corta el diámetro formando con él dos ángulos rectos, la parte *FG* del diámetro que queda entre la cuerda y la circunferencia se llama seno verso, y
es la altura del segmento: *FG* es el 18.
seno verso ó la altura del arco *DGE*.

55 El sector es una figura terminada por dos radios del círculo y el arco que estos comprehenden; *ACHA* es un sector formado de los dos radios *CA*, *CH*, y del arco *HA* que dichos dos radios comprehenden.

56 Llámase polígono una figura de muchos lados; si los lados

y

Fig. y los ángulos de esta figura son iguales unos á otros, el polígono se llama regular; donde nó, se llama irregular.

57 El polígono toma nombre del número de sus lados. Quando estos son 5, el polígono se llama pentágono; si 6, se llama exâgono; si 7, heptágono; si 8, octógono; si 9, nonágono; si 10, decágono; si 11 hundecágono; si 12, dodecágono. Véanse las figuras 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26.

58 En todo quadrilátero, una linea tirada desde un ángulo á su
27. opuesto, se llama diagonal.

59 Llámase altura de una figura toda linea perpendicular tirada desde su vértice á su basa; quiero decir, que esta linea está derecha en la figura. El area de toda figura es la superficie que contiene.

Vamos á enseñar como se hacen

cen algunas operaciones fundamenta- Fig.
les para hallar el area de las figuras.

Operaciones fundamentales.

60 Cuestion I. *Partir en dos partes iguales una linea* AB.

Póngase en el extremo *B* la punta de la una pierna del compás; ábrasela de modo que coja mas de la mitad de *AB*; estando así abierto, trácese el arco *DE*, póngase la una punta en *A*, y con la misma abertura del compás córtese el primer arco en *D* y *E*; tírese la *DE*, esta cortará la linea dada *AB* en su punto medio *C*. 28.

61 Cuestion II. *En el punto* C *de la linea dada* AB, *levantar una perpendicular.*

Mas arriba de la linea dada *AB* en un punto conveniente *D* plántese la punta de la una pierna del compas, ábrase la otra punta

Fig. ta hasta el punto *C*, con la misma abertura trácese una circunferencia que corte la *AB* en *E*; tírese el diámetro *EDF*, por el punto *C* y por el extremo *F* del diámetro tírese la linea *CF*, la qual será perpendicular á la linea dada *AB*, en
29. el punto *C*, como le pide.

62 Cuestion III. *Desde un punto* C *mas arriba de una linea dada* AB, *baxarle una perpendicular.*

Plántese en el punto *C* la punta de la una pierna del com-
30. pás, desde el qual con la abertura correspondiente trácese el arco *DE* que corte la linea *AB* en los puntos *D*, *E*; desde los puntos *D* y *E* con la misma abertura del compás trácese un arco por debaxo de la misma linea, que corte otro en *F*; por los puntos *C* y *F* tírese la linea *CF*, esta será perpendicular á la linea *AB*.

63 Cuestion IV. *Tirarle por un punto dado una paralela á una linea recta dada.* Fig.

Sea AB la linea á la qual se ha de tirar la paralela por el punto C tambien dado.

Tírese desde el punto C, conforme se ha enseñado en la última cuestion, la perpendicular CD á la linea AB. En el punto E de la linea AB plántese la una pierna del compas, y teniéndole abierto la distancia CD, descríbase el arco FG; aplíqnese una regla que toque el arco, y el punto C, y tirando la linea CH, esta será la paralela pedida. 31.

64 Cuestion V. *Partir una linea recta dada en un número de partes iguales.*

Sea AB la linea dada. Desde el punto A tírese la recta AC como se quiera; desde el punto B tí- 32.

re-

rese la recta *BD* paralela á la *AC*, señálense á lo largo de *AC* y *BD*, desde los puntos *A* y *B*, tantas partes iguales *AE*, *EF*, *FG*, &c. y *BK*, *KL*, *LM*, *MN*, &c. tantas partes una menos quantas se han de señalar en la linea dada, júntese el último punto de *AC* con el primero de *BD*; y tambien tírense las líneas *KK*, *IL*, *HM*, *GN*, *FU*, la línea *AB* estará dividida en el número de partes que se quiere en los puntos *k*, *i*, *h*, *g*, &c.

65 Es obligacion de los artistas estar diestros en medir las tres dimensiones de todo cuerpo, ó averiguar midiéndolas, lo que un cuerpo tiene de largo, ancho y profundo. La extension que expresa lo que un cuerpo tiene de ancho y largo se llama el area ó superficie, y las dos, esto es el ancho y largo, multipli-

plicadas una por otra, esto es, su producto, es lo que se llama area ó superficie del cuerpo; la tercera extension, finalmente, que expresa quanto un cuerpo tiene de alto ú profundo, se llama altura ó profundidad, tercera dimension de todo cuerpo. Ninguno hay sin las tres juntas, y el producto de unas por otras compone lo que en los cuerpos llamamos solidez.

Es, pues, mi objeto enseñar como se mide cada una de ellas, y por consiguiente declarar como se halla el valor de las lineas, de las superficies ó areas y de la solidez de los cuerpos.

Es natural que segun sea diferente la naturaleza de las extensiones que hemos de medir, nos sirvamos tambien para executar su medicion de medidas de diversa especie. La medicion de la linea la

exe-

executamos con medidas lineares ó de distancia ; para la de las areas ó superficies nos valemos de superficies, y para la medicion de los cuerpos ó sólidos, nos valemos de sólidos. Para esto tenemos un instrumento llamado vara de Burgos y tambien vara de Castilla, el pie, la pulgada, y la linea, que son partes suyas. La vara tiene 3 pies, el pie 12 pulgadas y cada pulgada 12 lineas: hay, pues, en la vara 3 pies, 36 pulgadas y 432 lineas.

Bien se vé que en el arte de la medicion no pueden menos de ocurrir dificultades inseparables de la medicion de las lineas curvas y de las superficies curvilineas. Con el fin de facilitar su resolucion, se vale la Geometría de todos los medios que la ayudan á superarlas, siendo el mas general de todos el valerse de algunos signos ó carac-

te-

teres que ya le vienen de la especulativa, y son los siguientes:

El signo + significa la suma de las cantidades entre las quales se halla; 2+3 v. g. señala 5, ó que 2 y 3 son sumados uno con otro. El signo — significa que de dos cantidades entre las quales se halla, la segunda es restada de la primera; 8—3 v. g. significa que 3 es restado ó se ha de restar de 8, y por lo mismo 8—3 vale 5.

Este caracter × puesto entre dos cantidades manifiesta que la una está multiplicada por la otra; 4×3 quiere decir que 4 está multiplicado por 3, ó que 4×3 vale 12.

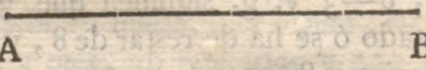
Para señalar que dos cantidades son iguales, ponemos entre ellas este signo = que significa es igual á; v. g., 3+2=5, quiere decir que 3 sumado con 2 vale ó es igual á 5.

Fig.

Medicion de las lineas.

66 Aplíquese á la linea por medir la vara ó qualquiera de sus partes; tendrá dicha linea tantas veces el instrumento con que se hubiere medido quantas en su longitud cupiere.

Exemplo.

33. 

Para medir la linea *AB*, le aplicarémos desde uno á otro extremo tantas veces la vara, quantas se pueda; si la vara cupiere quatro veces, la linea será de quatro varas; si se la hubiere medido con el pie, y este cupiere en ella las mismas veces, la linea seria de quatro pies. Pero si ademas de la vara cupiere en la linea alguna de sus partes, como pies, pulgadas, &c., la li-

linea será de tantas varas, pies, &c.

67 Pero mejor será hacer esta medicion con una vara dividida en partes decimales, haciéndola servir de escala decimal.

Para cuyo fin se dividirá un lado de la vara en 10 partes iguales, cada una de estas en otras 10 partes iguales, con lo que toda la vara estará dividida en 100 partes iguales. Estas tambien se podrán dividir en 10 partes; y con esto toda la vara estará dividida en 1000 partes iguales.

Exemplo.

Supongamos ahora que se me ofrece medir una linea, y halle que en ella cabe tres veces toda la vara, 5 de sus diez partes, 3 de sus centésimas y 4 de sus milésimas; quiero decir, hallo que la linea propuesta es de 3 v. 534 milésimas de vara.

Quando la linea por medir es curva, en muchos casos es poco seguro, y quasi imposible aplicarle la medida linear; entonces lo primero que se hace es tender en plano la linea por medir, esto es, averiguar con que linea recta es igual, y logrado esto, se la mide tan fácil, y seguramente como si fuese recta.

Medicion de las superficies.

68 La medida de las superficies ha de ser tambien, segun lo dexamos insinuado, una superficie; pues es muy natural que para determinar la extension de una area nos sirvamos de una medida comun, la qual aplicándola muchas veces sobre el area por medir la cubra toda.

da. Esta es la misma práctica que hemos propuesto para averiguar quanto tiene de longitud ó largo una linea.

Es evidente por lo mismo que la medida comun de las superficies, ha de ser tambien una superficie como una vara quadrada, un pie quadrado &c. Luego medir la superficie de un rectángulo v. g. es determinar el número de varas quadradas, ó de pies quadrados, pulgadas quadradas, lineas quadradas que caben en dicha superficie; lo que se consigue multiplicando el número que expresa quantas veces la medida de que nos valemos cabe en la basa, de la figura que queremos medir, por el número que expresa quantas veces cabe en su altura la misma medida.

Como la superficie que sirve de medida para todas ha de ser la

 mas

Fig. mas sencilla que posible sea, se ha tomado por la tal medida el quadrado, por ser de todas las figuras la que, por rectilineos sus lados y rectos sus ángulos, es mejor de comparar con todas las demas figuras; por cuyo motivo quadrar una superficie, y medir una superficie es todo uno. Sin embargo, no es solo el quadrado el que puede servir para medir las figuras, podria servir para lo mismo otra superficie qualquiera; y si se le ha dado al quadrado la preferencia, es porque con él se executan las mediciones con mas facilidad.

Medir un quadrado.

69 El quadrado es, segun hemos dicho quando le hemos definido, una figura quadrilátera, cuyos lados son todos iguales uno á otro, y rec-
34. tos sus ángulos como *ABFG*.

Re-

Regla.

Exprésese el lado del quadrado si se quiere en pies, ó pulgadas ó &c. el producto será el area de la figura.

Exemplo.

Sea v. g. $FG = 21, 269$ pulgadas; el area de la figura será el quadrado de este número.

$$
\begin{array}{r}
FG = 21,269 \\
FG = 21,269 \\
\hline
191\,421 \\
1276\,14 \\
4253\,8 \\
21269 \\
42538 \\
\hline
4524,90361
\end{array}
$$

Medir un triángulo.

70 Dados los tres lados de un triángulo, hallar su area.

Regla.

De la mitad de la suma de los tres lados, réstese cada lado; multiplíquense las tres diferencias cada una por la mitad de la suma; la raiz quadrada de este producto será el area del triángulo.

Exemplo.

Los tres lados de una tierra triangular son 15, 14, 13 varas ¿quantas varas tiene de area dicha tierra?

Aquí la suma de los tres lados $=15+14+13=42$; la mitad de la suma $=21$.

Y $21-15=6$; $21-14=7$; $21-13=8$.

Entonces $21\times6\times7\times8=7056$.

Y la raiz quadrada de 7056=84 varas quadradas, area de dicha tierra.

De las figuras irregulares.

71 Para medir estas figuras se dividen en varios triángulos tirando lineas desde uno de sus ángulos á todos los demas; la suma de las areas de todos los triángulos es area de toda la figura.

Pero las lineas serán mejor dispuestas que quando se tiran todas desde el mismo punto, si se divide la figura en tantos trapecios quanto se pueda, y trazando tan pocos triángulos como sea posible; porque el area de un trapecio se halla mas pronto que las areas de los dos triángulos que le componen.

Toda figura rectilinea se dividirá en tantos triángulos, sin que ninguna de las lineas que le dividen

Fig. den corte otra, quantos tenga la figura.

35. *Medir un trapecio.*

72 El trapecio es una figura quadrilátera, cuyos quatro lados son desiguales como *ABCD*, en la qual la linea *AC* tirada desde un ángulo á su opuesto es la diagonal del trapecio; *BF*, y *DE* son perpendiculares tiradas á la *AC* desde los puntos *B* y *D*.

Regla.

Tómense en pulgadas las dimensiones de la figura, y multiplíquese la suma de las perpendiculares por su basa ó diagonal *AC*, divídase el producto por 2, y el cociente será el area del trapecio.

Exemplo.

Sea la diagonal *AC* de 78 pul-
35. gadas, *DE* de 23 y *BF* de 15, 5 ¿qual es el area de esta figura?

DE

$$DE = 23$$
$$BF = 15,5$$

$$\begin{array}{r} 38,5 \\ AC = \quad 78 \\ \hline 3080 \\ 2695 \\ \hline 2)3003,0(1501,50 \end{array}$$

Medicion de las figuras irregulares rectilinea.

73 Las figuras irregulares son, como queda dicho, las que tienen mas de quatro lados, y estos desiguales.

Poligonos irregulares.

Para medirlos se reducen á triángulos y trapecios, cuyas figuras

Fig. ras acabamos de decir como se miden.

Supongamos que háyamos de me-
36. dir la figura irregular *AFBEDCHA*.

Primero la dividiré en los dos trapecios *ADEFA* y *ADCBA*.

Del círculo y algunas de sus partes.

74 Ninguna figura es de tanto recurso en la práctica como el círculo. La razon de su diámetro á su circunferencia no está todavía enteramente averiguada; pero si hasta ahora ha burlado el empeño de todos los matemáticos que con gran talento y constancia la han buscado, no ha sido del todo inútil su trabajo, porque algunos se han aproxîmado tanto á determinarla con puntualidad, que para los usos de la práctica sirve la que han señalado lo mismo que la verdadera.

Esta razon es la de 1 á........ 3,14159; quiero decir, que siendo el diámetro 1, la circunferencia es 3,14159, harémos, pues, de ella el uso acostumbrado.

75 Cuestion I. *Dado el diámetro de un círculo.*

1.° Hallar su circunferencia.

Regla.

Multiplíquese el diámetro por 3,1416, el producto será la circunferencia.

Si el diámetro es 12 ¿qual es la circunferencia?

Entonces (12×3,1416=)....... 37,6992; esta es la circunferencia.

2.° Hallar el area.

Regla.

Multiplíquese 0,7854 por el quadrado del diámetro, y el producto será el area.

Si

Si el diámetro es 12 ¿qual será el area?

Entonces $(12 \times 12 \times 0{,}7854 =) \ldots$ $113{,}0976$ es el area.

O, el radio multiplicado por la mitad de la circunferencia, dará el area del círculo.

Así $\frac{37{,}6992}{2} \times 6 = 113{,}0976$.

Tambien el quadrado del diámetro multiplicado por 0,392699 da el area del semicírculo.

3.° Hallar el lado del quadrado igual en area al círculo.

Regla.

Multiplíquese el diámetro por 0,886217, y el producto es el lado del quadrado igual.

76 Cuestion II. *Dada la circunferencia de un círculo.*

1.° Hallar su diámetro.

Re-

Regla.

Multiplíquese la circunferencia por 0,31831, el producto será el diámetro.

Supongamos que la circunferencia es 12 ¿qual será el diámetro?

Aquí ($12 \times 0,31831 =$) 3,81972 es el diámetro.

2.° Hallar el area.

Regla.

Multiplíquese el quadrado de la circunferencia por 0,0795776, el producto será el area.

Sea la circunferencia 12 ¿qual será el area?

Aquí ($12 \times 12 \times 0,07958 =$)........ 11,45952 es el area.

3.° Hallar el lado de un quadrado igual.

Regla.

Multiplíquese la circunferencia

por

por 0,282095, y el producto es el lado del quadrado igual.

Exemplo.

Supongamos que la circunferencia es 12; se pide el lado del quadrado de igual area al círculo.

Aquí (12×0,2821=) 3,3852 es el lado pedido.

77 Cuestion III. *Dada el area del círculo.*

1.° Hallar el diámetro.

Regla.

Multiplíquese la raiz quadrada del area por 1.12837, el producto será el diámetro.

Si el area es 12 ¿qual será el diámetro.

Exemplo.

Aquí ($\sqrt{12}$×1,12837=)......... 3,90877 es el diámetro.

2.° Hallar la circunferencia.

Re-

Regla.

Multiplíquese la raiz quadrada del area por 3,5449 y el producto es la circunferencia.

Quando el area es 12 ¿qual será la circunferencia?

Aquí ($\sqrt{12} \times 3{,}5449 =$)12,3798 es la circunferencia.

3.° Hallar el lado de un quadrado de igual superficie.

Regla.

La raiz quadrada del area dada será el lado del quadrado pedido.

Exemplo.

Quando el area es 12 ¿qual es el lado del quadrado igual.

Aquí ($\sqrt{12} =$)3,4641 es el lado pedido.

78 Cuestion IV. *Dado el lado del quadrado ó su area.*

1.º Hallar el diámetro de un círculo de igual area.

Regla.

Multiplíquese el lado del quadrado por 1,12837, el producto será el diámetro pedido.

Exemplo.

Quando el diámetro de aquel círculo de area igual al quadrado cuyo lado es 12.

Aquí (12×1,12837=)13,54044 es el diámetro.

2.º Hallar la circunferencia de un círculo igual.

Regla.

Multiplíquese el lado del quadrado por 3,5449, el producto será la circunferencia pedida.

Exemplo.

Qual es la circunferencia de aquel círculo cuya area es igual al quadrado, quando su lado es 12.

Aquí ($12 \times 3,5449 =$) $42,5388$ es la circunferencia pedida.

3.º Hallar el lado del quadrado que podrá inscribirse en el círculo de igual area al quadrado dado.

Regla.

Multiplíquese el lado dado por 0,797884, y el producto será el lado del quadrado pedido.

Exemplo.

Qual es el lado de aquel quadrado que podrá inscribirse en el círculo de igual area al quadrado cuya area es 12.

Aquí ($12 \times 0,797884 =$)............ 9,574608 es el lado pedido.

4.º Hallar el area de un qua-

Fig. drado que pueda inscribirse en el círculo de igual area al quadrado dado.

Regla.

Multiplíquese el quadrado del lado dado por 0,63662, el producto será el area del quadrado pedido.

Exemplo.

Qual es el area de aquel quadrado que podrá inscribirse en un círculo de igual area á un quadrado cuyo lado es 12.

Aquí $(12 \times 12 \times 0{,}63662 =)$...... 91,67328 es el area pedida.

79 Cuestion V. *Dado el radio* CA *de un círculo la cuerda* AB *de*
37. *su arco; hallar el seno verso* DE *de la mitad de dicho arco.*

Regla.

Del quadrado del radio, réstese el quadrado de la mitad de la cuer-

cuerda ; la raiz quadrada del residuo se restará del radio y será el seno verso. Fig.

Exemplo.

En un círculo cuyo rádio es 25 ¿qual es el seno verso del arco, cuya cuerda de su duplo es 48?

$25\times25-24\times24=49$ cuya raiz quadrada es 7, luego $25-7=18$ seno verso pedido.

80 Cuestion VI. *Dado el radio* CA *de un círculo y el seno verso* ED *del arco* BD *hallar* 38.

1.° La cuerda *AB* del duplo del arco.

Regla.

Del duplo del radio réstese el seno verso, multiplíquese el residuo por el seno verso; entonces el duplo de la raiz quadrada del producto dará la cuerda del duplo del arco.

Exemplo.

En un círculo cuyo radio es 25 ¿qual es la cuerda del arco cuyo seno verso es 18?

Entonces $\sqrt{2\times25-18\times18\times2}=48$ es la cuerda pedida.

2.° Hallar la cuerda *BD* de dicho arco.

Regla.

Multiplíquese el duplo del radio por el seno verso, y la raiz quadrada del producto será la cuerda del arco.

Exemplo.

Si el radio del círculo es 25 y el seno verso de un arco suyo es 18 ¿qual es la cuerda de dicho arco.

Aquí ($\sqrt{2\times25\times18}=$) 30 es la cuerda pedida.

81 Cuestion VII. *Siendo conocida la cuerda* AB *de un arco circu-*

lar,

lar, y el seno verso ED *de la mitad del dicho arco.* Fig. 38.

1.º Hallar el radio *CA* del círculo.

Regla.

El quadrado de la mitad de la cuerda súmese con el quadrado del seno verso, divídase la suma por el duplo del seno verso, y el cociente es el radio pedido.

Exemplo.

Si la cuerda *AB*=48 y el seno verso *DE*=18 ¿qual será el radio del círculo?

Aquí $\left(\frac{\frac{48}{2}\times\frac{48}{2}+18\times18}{2\times18}=\right)$ 25 es el radio pedido.

La distancia de la cuerda al centro se hallará restando del radio el seno verso.

2.° Hallar la cuerda *BD* de la mitad del arco.

Fig.

Regla.

Súmese el quadrado de la mitad de la cuerda con el quadrado del seno verso; y la raiz quadrada de la suma será la cuerda de la mitad del arco.

Exemplo.

Si la cuerda es 48, y el seno verso es 18 ¿qual es la cuerda de la mitad del arco?

$(\sqrt{24\times24+18\times88}=)30$, esta es la cuerda de la mitad del arco.

82 Cuestion VIII. *Hallar la*
38. *longitud de un arco circular* BDA.

Quando la cuerda *AB* de dicho arco y la cuerda *BD* de su mitad es conocida.

Regla.

De 8 veces la cuerda de la mitad del arco, réstese la cuerda de todo el arco; y un tercio del residuo será próxîmamente la longitud de la cuerda de dicho arco.

Exemplo.

Si la cuerda del arco es 48, y la cuerda de la mitad del arco es 30 ¿qual es la longitud del arco?

Entonces $\left(\frac{30\times8-48}{3}=\right)$ 64 esta es la longitud del arco.

Quando el diámetro *DF* del círculo, y el arco *ADB* en grados es conocido.

Regla.

Multiplíquense los grados del arco por el diámetro del círculo; el producto multiplicado por......... 0,0087267 dará la longitud del arco en las mismas medidas que dan el valor de su diámetro.

Exem-

Fig.

Exemplo.

En un círculo cuyo diámetro es 50 pies ¿quanto tiene de largo un arco suyo de 147 grados, 29 minutos?

Aquí 147 grados, 29 minutos, $=147,483$ grados reduciendo los 29 minutos á decimales.

Entonces.......................................
$(147{,}483 \times 50 \times 0{,}0087267 =) 64{,}352$ pies, largo del arco.

La longitud del arco expresado en grados se hallará mas facilmente partiendo el número 114,59132 por el diámetro, el cociente multiplicado por la longitud del arco, dará en grados su valor.

39. *Medir el segmento de un círculo.*

Definicion.

83 El segmento de un círculo es

es una parte suya cortada por una linea recta menor que el diámetro, la qual corta la circunferencia en dos puntos; así *EAFE* es un segmento menor que el semicírculo, y *FBEF*, es un segmento mayor que el semicírculo.

La linea recta que corta el segmento se llama la cuerda del arco; así *EF* es la cuerda del arco *FAE* y tambien del arco *FBE*.

Si la linea cuerda de un arco fuere cortada en dos partes iguales, y la recta tirada desde el centro del círculo, al punto medio de la cuerda, es continuada, de cada lado de la circunferencia, será el diámetro del círculo, y cada una de sus partes interceptada entre el punto medio de la cuerda y la circunferencia, se llama la linea versa de la mitad del arco que corta respectivamente.

Así

Así cortando *EF* en *C*, y tirando el diámetro *ACGB*; la parte *AC* es el seno verso del arco *AE*=*AF*, y la parte residua *CB* es el seno verso del arco *EB*=*BF*.

Regla.

1.° Quádrese el semidiámetro ó el radio del círculo *AG*, y multiplíquese dicho quadrado por 7.

2.° Multiplíquese el radio *AG* por 4, y dicho producto por *EG* (que es la diferencia entre el seno verso *AC* y el radio *AG*).

3.° Quádrese dicha distancia *CG*, y multiplíquese el quadrado por 3, súmese el producto con el producto de la segunda regla, y réstese esta suma de seis veces el quadrado del radio (ó el producto sacado por la primera regla), y este residuo será el dividendo.

4.° Multiplíquese el radio del cír-

círculo por 4, 5, y *CG* por 3, súmense uno con otro estos dos productos y la suma será el divisor.

5.° Pártase el dividendo por el divisor, y multiplíquese el cociente por la mitad de la cuerda *EF*; esto es, por *EC*, este último producto es el area del segmento.

Exemplo.

Sea el radio $EG=FG$ de doce pulgadas, y el seno verso $AC=6$ ¿qual es el area del segmento?

Radio $EG=12$	$CG=6$
4	6
48	36
6	3
288	108
108	
396 suma.	

CG

CG=6	
3	
18	
Radio *EG*=12	
12	
24	
12	
144	
Mult.	7
Prod.	1008
Subs.	396
	612
Mult.	4,5
Radius.	12
Prod.	54,0
Add.	18

Divisor 72)61 2(8,5 cocient.

Da-

Darémos otro modo de medir el area del segmento de círculo siendo dado el diámetro del círculo y el seno verso del segmento, sin necesidad de hallar la cuerda.

Regla.

Multiplíquese el diámetro por el seno verso del segmento, y del producto que se llamará el término primero: réstese $\frac{3}{4}$ del quadrado del seno verso, y el residuo se le llamará el segundo número. Despues con la raiz quadrada del primer número súmese quatro veces la raiz quadrada del segundo número, y la suma se multiplicará por $\frac{4}{15}$ del seno verso, el producto será el area del segmento pedido.

Exemplo.

Sea el diámetro del círculo 50 pulgadas y el seno verso de su seg-

Fig. segmento 10 pulgadas, se pide el area del segmento.

Diámetro 50
Seno verso 10

500 producto n. 1.
75

425 residuo.

84 Hallar el area de un sector
40 y 41. de círculo *CADB*.

1.° Quando el radio *CA* del círculo, y el largo del arco sectoral *ADB* son conocidos.

Regla.

Multiplíquese el radio por la mitad del arco dado, y el producto será el area del sector.

Exem-

Exemplo.

En un círculo cuyo radio es 25 se pide el area de un sector, cuyo arco tiene de largo 64,352.

Entonces $\left(\frac{64,352}{2} \times 25 =\right) 804,4$ es el area pedida.

2.° Quando el radio del círculo y los grados del arco sectoral son conocidos.

El sector del círculo es una parte suya formada por dos radios que comprehenden una parte de la circunferencia así *ACBA* es el sector del círculo *ADBA*.

Regla.

Multiplíquense los grados del sector por el número constante...... 0,008726 y el producto por el quadrado del radio del círculo, este último producto es el area del sector propuesto.

Exemplo.

Sea el número de los grados del arco $AB=40$ y el radio del semidiámetro AC del círculo $=60$ pulgadas.

¿Qual es el area del sector $ACBA$?

Multiplicador constante	0,008726
	40
	0 349040
	3600
Quadrado del radio......	1256544

De aquí se ha sacado un método fácil para hallar el area de un segmento de círculo; porque si del area del sector se resta el area del

del triángulo, cuyos dos lados son sus radios, y el tercero la cuerda de su basa, el residuo será el area del segmento.

Area de las figuras regulares.

85 Aquí me propongo enseñar como se mide la superficie de las figuras regulares; esto es, de aquellas que tienen iguales sus lados y sus ángulos. Me toca pues aquí decir como se miden los polígonos regulares, lo que quedará reducido al uso de las quatro tablas siguientes. Para cuya inteligencia cabal conviene saber que hay polígonos que se llaman inscriptos, y circunscriptos á los círculos.

Número de lados.	Radio del círculo circunscripto.	Radio del círculo inscripto.	El area.
3	0,5773503	0,2886751	0,4330127
4	0,7071068	0,5000000	1,0000000
5	0,8506508	0,6881910	1,7204774
6	1,0000000	0,8660254	2,5980762
7	1,1523825	1,0382617	3,6339124
8	1,3065630	1,2071068	4,8284271
9	1,4619022	1,3737387	6,1818242
10	1,6186340	1,5388418	7,6942088
11	1,7747329	1,7028437	9,3656404
12	1,9318516	1,8660254	11,1961524

Tabla II. *Quando el radio del círculo circunscripto es* 1.

Número de los lados	Longitud del lado.	Radio del círculo circunscripto.	El area.
3	1,7320508	0,5000000	1,2990381
4	1,4142136	0,7071068	2,0000000
5	1,1755705	0,8090170	2,3776412
6	1,0000000	0,8660254	2,5980762
7	0,8677674	0,9009689	2,7364102
8	0,7653668	0,9238795	2,8284271
9	0,6840403	0,9396926	2,8925437
10	0,6180340	0,9510565	2,9389263
11	0,5634651	0,9594931	2,9735250
12	0,5176381	0,9659259	3,0000000

 Quando el radio del círculo inscripto es 1.

Número de los lados.	Longitud del lado.	Radio del círculo circunscripto.	El area.
3	3,4641016	2,0000000	5,1961524
4	2,0000000	1,4142236	4,0000000
5	1,4530851	1,2360680	3,6327128
6	1,1547005	1,1547005	3,4641016
7	0,9631491	1,1099160	3,3710222
8	0,8284271	1,0823919	3,3137084
9	0,7279405	1,0641776	3,2757315
10	0,6498394	1,0514622	3,2491970
11	0,5872521	1,0422172	3,2298913
12	0,5358984	1,0352760	3,2153904

Tabla IV. *Quando el area es* 1.

Número de los lados.	Longitud del lado.	Radio del círculo circunscripto.	Radio del círculo inscripto.
3	1,5196716	0,8773827	0,4386912
4	1,0000000	0,7071068	0,5000000
5	0,7623870	0,6485251	0,5246678
6	0,6204033	0,6204033	0,5372849
7	0,5245813	0,6045183	0,5446520
8	0,4550899	0,5946034	0,5493420
9	0,4021996	0,5879764	0,5525172
10	0,3605106	0,5833184	0,5547687
11	0,3267617	0,5799148	0,5564242
12	0,2988585	0,5773503	0,5576775

Un polígono está inscripto en un círculo quando cada ángulo del polígono tiene su vértice en la circunferencia del círculo.

El polígono circunscripto en el círculo es aquel cuyos lados tocan cada uno al círculo.

De un círculo se dice que está inscripto en un polígono quando toca cada lado del polígono.

Un círculo está circunscripto á un polígono quando la circunferencia del círculo toca cada ángulo del polígono.

En los polígonos regulares cuyo número de lados no pasa de 12, y 1.° es conocido su lado; 2.° el radio del círculo circunscripto; 3.° el radio del círculo inscripto; 4.° el area del polígono. Quando una de estas quatro cosas es conocida. Las otras se hallan prontamenmente por medio de las quatro tablas antecedentes.

90 Cuestion I. *Dado el lado* L *de un polígono regular*.

1.º Hallar el radio R del círculo circunscripto.

Regla.

Multiplíquese el lado dado por N, y el producto será el radio pedido.

¿Qual es el radio de un círculo que se puede circunscribir á un octógono regular cuyo lado es 12?

Aquí $N=1,3065630$ por la tabla 86 entonces........................

$1,3065630 \times 12 = 15,678756 = R$.

2.º Hallar el radio (r) del círculo inscripto.

Regla.

N, multiplicado por el lado dado, da r.

Si L es 12 ¿qual será r?

Aquí

Fig. Aquí $N=1,2071068$ por la tabla 86.

Entonces.......................................

$1,20711068 \times 12 = 14,4852816 = r.$

3.° Hallar el area A.

Regla.

N (*), multiplicado por el quadrado del lado dá el area.

Si L es 12 ¿qual será el area?

Aquí $N=4,8284271$, por la tabla 86.

Aquí...

$4,8284271 \times 12 \times 12 = 695,293502 = A.$

91 Cuestion II. *Dado el radio* R *del círculo circunscripto á un*
42 y *polígono regular.*
43. 1.° Hallar L lado de dicho polígono.

Regla.

N, multiplicada por el radio dado, dará L.

Si

(*) N, el número tabular de cada tabla.

Si el radio del círculo es 12; se pide el lado del octógono regular inscripto.

Aquí $N=0{,}7653668$ sacado de la tabla 87.

Aquí..
$0{,}7653668 \times 12 = 9{,}1844016 = L$.

2.° Hallar el radio r del círculo inscripto en el polígono.

Regla.

N, multiplicada por R, da r.

Si R es 12 ¿qual será r?

Aquí $N=0{,}9238795$ dado por la tabla 87.

Aquí..
$0{,}9238795 \times 12 = 11{,}086554 = r$.

3.° Hallar el area A del polígono.

Regla.

N, multiplicada por el quadrado del radio dado dará el area pedida.

Si

Fig. Si $R=12$ ¿qual es A?

Aquí $N=2,8284271$ sacado de la tabla 87.

Aquí..

$2,8284271 \times 12 \times 12 = 407,2935024 = A$.

92 Cuestion III. *Dado el radio* r *del círculo inscripto en un*
42 y *polígono regular.*
43. 1.° Hallar el lado de dicho polígono.

Regla.

N, multiplicada por el radio dado, da L.

¿Qual es el lado de un octógono regular circunscripto á un círculo cuyo radio es 12?

Aquí $N=0,8284271$, sacado de la tabla 88.

Entonces..................................

$0,8284271 \times 12 = 9,9411252 = L$.

2.° Hallar R radio del círculo circunscripto.

Re-

Regla. Fig.

N, multiplicada por r, da R.

Si $r=12$ ¿qual será R?

Aquí $N=1,0823919$ sacado de la tabla 88, entonces......................

$1,0823919\times12=12,9887028=R$.

3.° Hallar A area de dicho polígono.

Regla.

N, multiplicada por el quadrado de r, da A.

Si $r=12$ ¿qual es A?

Aquí $N=3,3137084$ sacado de la tabla 88.

Aquí...

$3,3137084\times12\times12=477,1740096=A$.

93 Cuestion IV. *Dada el area* A *de un polígono regular.*

1.° Hallar L largo del lado. 42 y 43.

Regla.

N, multiplicada por la raiz quadrada del area dada, el producto

ducto es el lado pedido.

¿Qual es el lado de un octógono regular cuya area es 144?

Aquí $N = 0.4550899$ tabla 89.

Luego...

$0{,}4550899 \times \sqrt{144} = 5{,}4610788 = L.$

2.° Hallar R radio del círculo circunscripto á dicho polígono.

Regla.

N, multiplicada por la raiz quadrada de A, da R.

Si $A = 144$ ¿qual es R?

Aquí $N = 0{,}5946034$ tabla 89.

Entonces...............................

$0{,}5946034 \times \sqrt{144} = 7{,}1352408 = R.$

3.° Hallar r radio del círculo inscripto en dicho polígono.

Regla.

N, multiplicada por la raiz quadrada de A, da r.

Si $A = 144$ ¿qual será r?

Aquí

Aquí $N=0,549342$, tabla 89. Fig.
Entonces...
$0,549342 \times \sqrt{144} = 6,592104 = r$.

Medicion de los sólidos.

Definiciones.

94 Llamamos sólido, segun dexamos dicho, un espacio terminado por las tres dimensiones largo, ancho y profundo ó altura.

El sólido cuyas basas ó planos extremos son iguales paralelos y figuras rectilíneas semejantes, y cuyos lados son paralelógramos, se llama prisma, y su nombre pende del número de los lados de su basa.

Si los planos extremos ó los lados son quadrados, el sólido se llama cubo. 44.

Si la basa ó plano extremo es un rectángulo, el sólido se llama paralelipípedo. 45.

Si

Fig. Si la basa ó los planos extremos son círculos el sólido se llama
46. cilindro.

El sólido formado sobre una basa rectilinea, siendo sus lados triángulos rectilíneos, cuyos vértices concurren todos en el mismo punto de un plano extremo, se llama pirámide, y sus nombres penden del número de los lados de su
47. basa.

Si la basa es un círculo, el
48. sólido se llama pirámide cónica.

El sólido terminado por una superficie convexâ, cuyos puntos son todos equidistantes de un punto dentro del sólido, se llama es-
49. fera. La linea recta que pasa por un punto que está á la misma distancia de la superficie, se llama el diámetro ó el exe de la esfera.

En una pirámide rectilinea, cónica, esfera ú otro sólido terminado do en punta, una parte suya terminada por dos planos extremos paralelos, se llama trozo; y sus partes que faltan hasta el extremo del trozo, hasta completar el sólido puntiagudo se llaman segmentos.

Estos son los cuerpos cuyas dimensiones nos toca declarar como se hallan.

Por consiguiente la medida de un sólido ó cuerpo debe hallarse de un modo que exprese sus tres dimensiones de que consta. Así como las superficies se miden con un quadrado, así la medida del sólido es el cubo; esto es, que así como el producto de la basa por la altura de un rectángulo expresa quantas veces el quadrado de la linea que se toma por unidad cabe en el area de un rectángulo ú otra figura dada, así el producto de la basa por la altura de un paralelipípedo rectángulo expresa quantas veces el cubo, que tiene por lado dicha recta que se toma por unidad, cabe en el paralelipípedo ó sólido que se quiere medir.

De algunos sólidos terminados por lineas rectas y figuras circulares.

Proposicion 1ª.

95 Dadas las dimensiones lineares de un cubo, de un paralelipípedo, de un cilindro ó de un prisma. Hallar su solidez.

Regla.

Multiplíquese el area de la basa ó del plano extremo por la altura ó el largo del cuerpo, y el producto expresará su solidez.

Exemplo.

1.º Qual es la solidez de un cu-

cubo cuyo lado tiene 12 pulgadas.

Aquí el area de su basa es $12 \times 12 = 144$.

Es, pues, la solidez el producto de $144 \times 12 = 1728$ pulgadas.

2.° ¿Qual es la solidez de un trozo de marmol, cuya longitud (*AB*) es 1[illegible] pies, el ancho (*AC*) $5\frac{3}{4}$ pies, y la basa (*AD*) $3\frac{1}{2}$ pies?

Aquí $5,75 \times 3,5 = 20,125$ el area de la basa.

Y $20,125 \times 10 = 201,125$ la solidez.

3.° Qual es la solidez de un prisma triangular que tiene 18 pies de alto, y por basa un triángulo equilátero cuyo lado tiene $1\frac{1}{2}$ pie de largo.

La tabla 86 nos enseña que la area de la basa y de un triángulo, cuyo lado es 1, es 0,433013, por lo que.......................................

Fig. $1{,}5 \times 1{,}5 \times 0{,}433013 = 0{,}97427925$ la area de la basa.

Luego por la regla la solidez ha de ser.. $0{,}97427925 \times 18 = 17{,}5370265$ es la solidez.

4.º ¿Qual es la solidez de un cilindro cuya altura *AB* es de 5 pies, y el diámetro *AC* de su basa es de
46. 2 pies?

Aquí $2 \times 2 \times 0{,}7854 = 3{,}1416$ el area de la basa y .... $3{,}1416 \times 5 = 15{,}708$ pies, es la solidez.

Proposicion 2.ª

96. 96 Hallar la solidez de una pirámide recta de la qual se conoce la basa ó extremo mayor y la altura perpendicular ó la distancia entre sus dos planos extremos.

Regla.

Multiplíquese el area de la basa por el tercio de la altura ó del largo el producto será la solidez. Fig.

Exemplo.

1.° Hallar la solidez de una pirámide cuya altura *AC* tiene 24 pies, y el lado *BD* de su basa quadrada es de 3 pies. 47.

Aquí $3 \times 3 = 9$ el area de la basa y $\frac{24}{3} = 8 = \frac{1}{3}$ de la altura.

Luego $9 \times 8 = 72$, esta es la solidez pedida.

2.° ¿Qual es la solidez de una pirámide de 15 pies de altura, y cuya basa es un exágono de 18 pulgadas?

Por la tabla 86 el exágono cuyo lado es 1, es 2,598076.

Por la misma tabla se hallará que el area del exágono basa de la pirámide es..

$1,5 \times 1,5 \times 2,598076 = 5,845671$ el area de la basa.

 Lue-

Luego $5,845671 \times \frac{15}{3} = 29,228355$ es la solidez.

Proposicion 3.ª

97 Hallar la solidez de una pirámide cónica recta siendo conocida su altura perpendicular y el diámetro ó la circunferencia de su basa.

Regla.

Si fuere dado el diámetro de su basa se multiplicará su quadrado por 0,2618.

Si fuere dada la circunferencia se multiplicará su quadrado por 0,026526, cada uno de estos productos dará la solidez de la pirámide cónica recta.

Exemplo.

1.º ¿Qual es la solidez de una pirámide cónica, cuyo diámetro *AB* de la basa tiene 18 pulgadas y

la altura *CD* tiene 15 pies? Fig.
Aquí 18 pulgadas son $1\frac{1}{2}$, pie 48.
ó 1,5.

Luego...
$1,5 \times 1,5 \times 0,2618 \times 15 = 8,83575$
pies es la solidez que se pide.

Exemplo.

2.° La circunferencia de la basa de una pirámide cónica es 40 pies, su altura es de 50 pies ¿qual es su solidez?

Aquí $40 \times 40 \times 0,0265 \times 50 = 2120$ pies son la solidez que se pide.

Proposicion 4.ª

98 Hallar la superficie convexâ de un cilindro recto en sabiendo quanto tiene de largo, y quanto el diámetro del círculo de su plano extremo.

Regla.

Multiplíquese primero el número 3,1416 por el diámetro, y despues el producto por el largo del cilindro, y este segundo producto será su superficie, ó multiplíquese la circunferencia por el largo del sólido, y el producto será su superficie convexâ.

Exemplo.

1.º ¿Qual es la superficie convexâ de un cilindro recto, cuyo diámetro *AC* es de 30 pulgadas; y su longitud *AB* tiene 60 pulgadas?

Aquí...
$(3,1416 \times 30 \times 60 =) 5654,88$, esta es la superficie convexâ.

Proposicion 5ª.

99 Hallar la superficie convexâ de una pirámide cónica recta; dada que sea la de su lado, y el diámetro de su basa la circunferencia de su

ba-

basa y el diámetro de su plano extremo.

Regla.

Quando es dado el diámetro se le multiplicará por 1,5708, si fuere dada la circunferencia, se habrá de multiplicar por 0,5; qualquiera de estos dos productos multiplicado por la altura del lado dará la superficie convexâ de la pirámide cónica.

Exemplo.

1.° ¿Qual es la superficie convexâ de una pirámide cónica recta, cuyo lado *AC* es 50, y el diámetro de la basa *AB* es 20?

Ahora ($1,5708 \times 20 \times 50 =$) 1570.8 es la superficie convexâ.

Exemplo.

2.° ¿Qual es la superficie convexâ de una pirámide cónica recta, cuya circunferencia de la basa

es

Fig. es 24 pies, y el lado derecho es de 32 pies?

Aquí $(24 \times 0,5 \times 32 =) 384$, esta es la superficie convexâ.

Proposicion 6.ª

100 Hallar un trozo de una pirámide, cuyos planos extremos son polígonos regulares semejantes que no pasan de 12 lados, siendo cono-
50. cidas las medidas lineares *AB*, *ab* de los dos planos extremos paralelos, y su distancia *Cc*.

Regla.

1.° Multiplíquese un lado del plano extremo mayor por un lado del plano menor.

2.° Con el producto súmese un tercio del quadrado de la diferencia de dichos dos lados.

3.° Multiplíquese la suma por el largo.

En-

4.° Entonces el producto multiplicado por el factor del polígono en la tabla 86 será la solidez pedida.

Exemplo.

1.° ¿Qual es la solidez del trozo de una pirámide quadrada siendo de 18 pulgadas el lado de su extremo mayor; y de 15 pulgadas el lado del extremo menor y siendo 60 pulgadas la altura?

Aquí $18-15=3$ dif. de los lados y $\frac{3\times3}{3}$ tercio del quadrado de dicha diferencia.

Entonces $(\overline{18\times15+3\times60}=)16380$ es la solidez pedida.

Exemplo.

2.° ¿Qual es la solidez de un trozo de pirámide exágona, de cuyo extremo mayor el lado es 5 pies y

Fig. y el del extremo menor 2 pies, y el largo es 12 pies?

Ahora $5-2=3$ y $\frac{3\times3}{3}=3$ es el tercio del quadrado de la diferencia de los dos lados.

Luego.......................................
$5\times2+3\times12\times2,598076=290,299856.$

Proposicion 7.ª

101 Hallar la solidez de un trozo de pirámide cónica recta, cuya altura *Cc*, y el diámetro de la circunferencia *AB*, *ab* de cada pla-
51. no extremo es dado.

Regla.

1.º Multiplíquese uno por otro el diámetro de la circunferencia.

2.º Con el producto súmense los quadrados de estos diámetros.

3.º Multiplíquese la suma por la altura dada.

El

4.° El producto multiplíquese por

$\begin{cases} 0,2618 \\ 0,026526 \end{cases}$ dá la solidez.

Exemplo.

1.° ¿Qual es la solidez de un trozo de pirámide cónica de la qual el diámetro del plano extremo mayor tiene 4 pies, y el del plano menor tiene 2 pies, y la altura es de 9 pies?

Aquí $4\times2=8$ producto de los dos diámetros.

Y $4\times4=16$: $2\times2=4$: $8+16+4=28$.

Entonces..................................

$28\times9\times0,2618=65,9736$ pies es la solidez.

2.ª ¿Qual es la solidez de un trozo de pirámide cónica, siendo 40 la circunferencia del plano extremo mayor, 20 la del menor, y 50 la altura ó el largo?

Aquí

Aquí..
$40\times20=800:40\times40=1600:20\times20=400.$
Entonces ($2800\times50\times0,026526=$) $3713,64$ es la solidez pedida.

Por la regla de la proposicion 6.ª se hallará la solidez del trozo de pirámide cónica, valiéndose de los diámetros de los planos extremos del sólido en lugar de sus lados; y poniendo el artículo 4.° en lugar de aquel de la proposicion 7.ª servirá para la proposicion 6.ª, haciendo igual mudanza.

Proposicion 8.ª

102 Hallar la superficie convexâ de un trozo de pirámide cónica recta, cuyo largo del lado derecho, y el diámetro y la circunferencia de los lados extremos paralelos son dados.

Re-

Regla.

Multiplíquese la suma de los diámetros por 1,5708, y la de las circunferencias por 0,5.

El producto multiplicado por el largo del dado será la solidez.

Exemplo.

1.º ¿Qual es la superficie convexâ de un trozo de pirámide cónica recta; cuyos diámetros de los planos extremos son 8 y 4 pies, y el largo del lado tiene 20 pies?

Ahora $8+4=12$ suma de los diámetros.

Y $12 \times 1,5708 \times 20 = 376,992$, superficie convexâ.

Exemplo.

2.º ¿Qual es la superficie convexâ de un trozo de pirámide cónica recta, cuya circunferencia de la

Fig. la basa mayor tiene 30 pies, y la de la basa menor tiene 10 pies, y el largo derecho tiene 20 pies?

Ahora $(\overline{30+10}\times 0,5\times 20=)400$ pies, esta es la superficie convexà pedida.

Proposicion 9ª

50. 103 Hallar la altura *CD* de una pirámide cónica, cuyas dimensio-
51. nes lineares (*AB*,*ab* *Cc*,) de un trozo suyo son conocidas.

Regla.

Multiplíquese la altura del trozo por la del lado ó diámetro del plano extremo mayor.

Divídase el producto por la diferencia de los lados y diámetros de los dos planos extremos, y el cociente será la altura de la pirámide cónica.

Exem-

Exemplo.

1.° El trozo de una pirámide quadrada, cuyo lado mayor tiene 5 pies, y el lado del menor tiene 3 pies, y la distancia de los planos extremos es 8 pies ¿qual es la altura de dicha pirámide?

Ahora $5-3=2$ diferencia de los lados.

$\left(\frac{5\times8}{2}=\right)20$ es la altura de la pirámide.

Proposicion 10.ª

104 Las dimensiones de una pirámide ó cónica siendo dadas, hallar quanto la corresponde de largo desde su vértice á una parte dada de su solidez.

Regla.

Dígase como la solidez de toda la pirámide pentágona ó cónica es al cubo de su altura; así, una parte dada de su solidez es al cubo de su altura desde el vértice ácia abaxo, cuya raiz cúbica es el largo pedido.

Exemplo.

Hay una pieza cónica de madera, el diámetro de cuya basa tiene 18 pulgadas, y el largo 12 pies ¿donde se la debe aserrar para dividirla en dos partes de igual solidez.

Aquí 18 pulgadas $=1,5$ pies, y $1,5 \times 1,5 \times 12 \times 0,2618 = 7,0686$ pies la solidez, cuya mitad es $3,5343$, y $12 \times 12 \times 12 = 1728$, cubo de lo largo.

Luego $7,0686 : 1728 :: 3,5343 : 864$ cuya raiz cúbica es $9,5244$, á cuya distancia del vértice conviene aserrarla.

De la esfera y alguna de sus partes.

Proposicion 1ª.

105 Hallar la superficie de la esfera.

1.° Dado su diámetro.

Regla.

Multiplíquese el quadrado del diámetro por 4,08408 el producto es la superficie que se busca.

¿Qual es la superficie de una esfera, cuyo diámetro es 1,3 pies?

Aquí $1,3 \times 1,3 \times 4,08408 = 6,9020952$ es la superficie.

2.° Siendo dados el diámetro y la circunferencia.

Regla.

Multiplíquese el diámetro por la circunferencia el producto es la superficie.

Exemplo.

¿Qual es la superficie de una esfera, cuyo diámetro es 1,3 pies, y la circunferencia es 4,08408 pies?

Aquí ($1,3 \times 4,08408 =$) 5,309304 es la superficie.

Proposicion 2ª

106 Hallar la solidez de la esfera.

1.° Dado el diámetro.

Regla.

Multiplíquese el cubo del diámetro por 0,5236, y el producto es la solidez.

¿Qual es la solidez de una esfera, cuyo diámetro es 1,3 pies?

Aquí ($1,3 \times 1,3 \times 1,3 \times 0,5236 =$) 1,1503492 pies es la solidez.

2.° Si la superficie y el diámetro son dados.

Regla.

Multiplíquese la superficie por $\frac{1}{6}$ del diámetro y el producto será la solidez.

Exemplo.

¿Qual es la solidez de una esfera, cuyo diámetro es 1,3 pies, y la superficie 6,9020952?

Aquí $(0,2166 \times 6,9020952 =) 1,4949$ pies es la solidez.

3.° Dada la superficie y la circunferencia.

Regla.

Multiplíquese la superficie por la circunferencia, el producto multiplicado por 0,05305 dará la solidez.

Exemplo.

¿Qual es la solidez de una esfera cuya superficie es 6,9020952, y la circunferencia es 4,08408?

Aquí

Aquí..
6,9020952×4,08408×0,05305=1,4954
es la solidez.

Proposicion 3ª.

107 Dada la superficie de la esfera.

1.º Hallar su diámetro.

Regla.

Multiplíquese la raiz quadrada de la superficie por 0,56419, y el producto será el diámetro.

Exemplo.

¿Qual es el diámetro de una esfera, cuya superficie es 6,9020952?

Aquí $\sqrt{6,9020952}$=8,3078.

Entonces (8,3078×0,56419=)4,6871 es el diámetro.

2.º Hallar la solidez.

Re-

Regla.

Multiplíquese la superficie, su raiz quadrada y 0,0940316 continuadamente, el producto dará la solidez pedida.

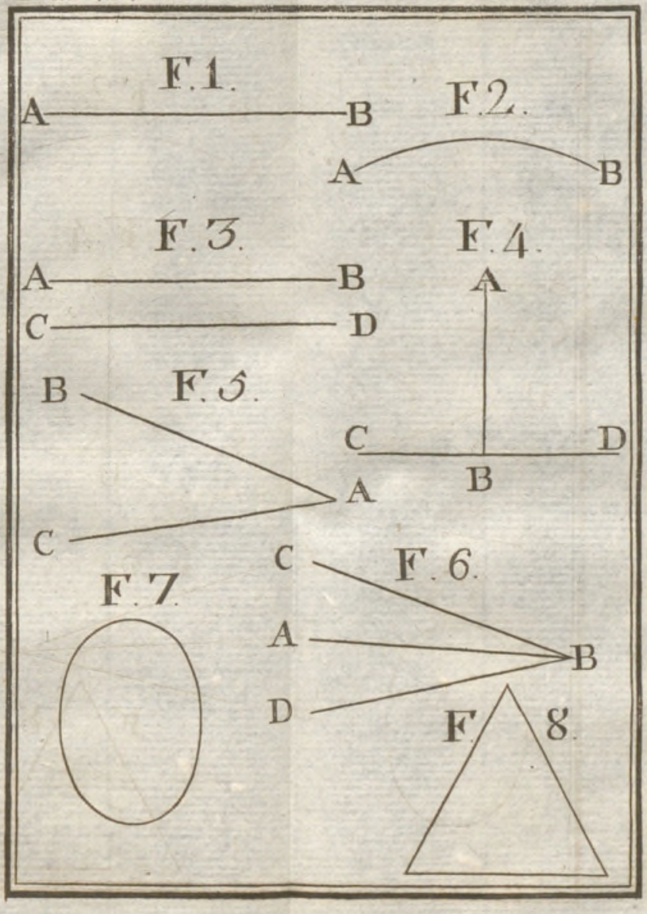
Exemplo.

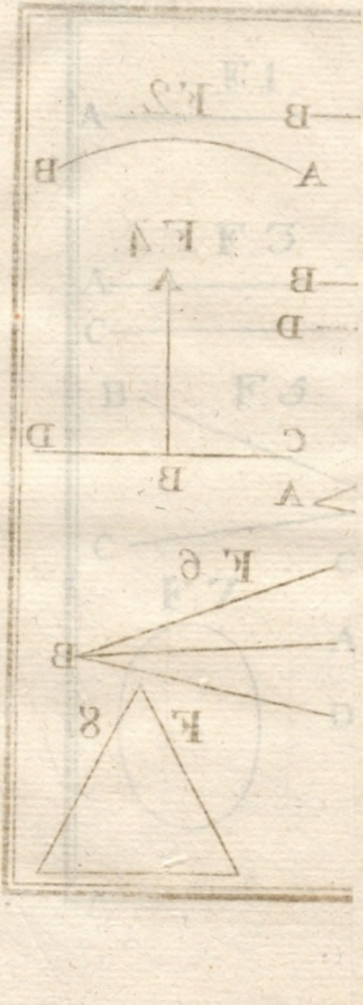
$(6,9020952 \times \sqrt{6,9020952} \times 0,0940316 =)$ 5,3918 es la solidez.

ERRATAS.

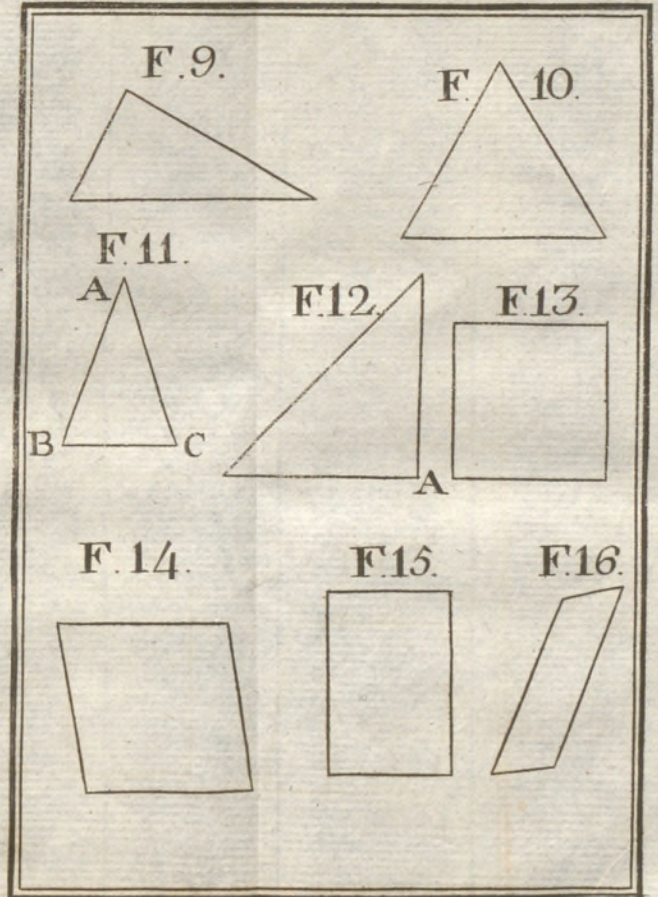
Pág.	*Lin.*	*Dice.*	*Léase.*
3.	20.	cienmilésimas millonésimas..	*diezmilésimas* *cienmilésimas.*
3.	17.	expresa............	*se expresa.*
10.	16.	$\frac{}{2}$....................	$\frac{1}{2}$.
42.	2.	derecha...........	*izquierda.*
56.	4.	8 cubo.............	8 ; *cubo.*
100.	2.	del arco...........	*duplo del arco.*
129.	13.	201,125...........	201,25.
138.	7.	=290,299856..	405,299856.

Lam. 1.

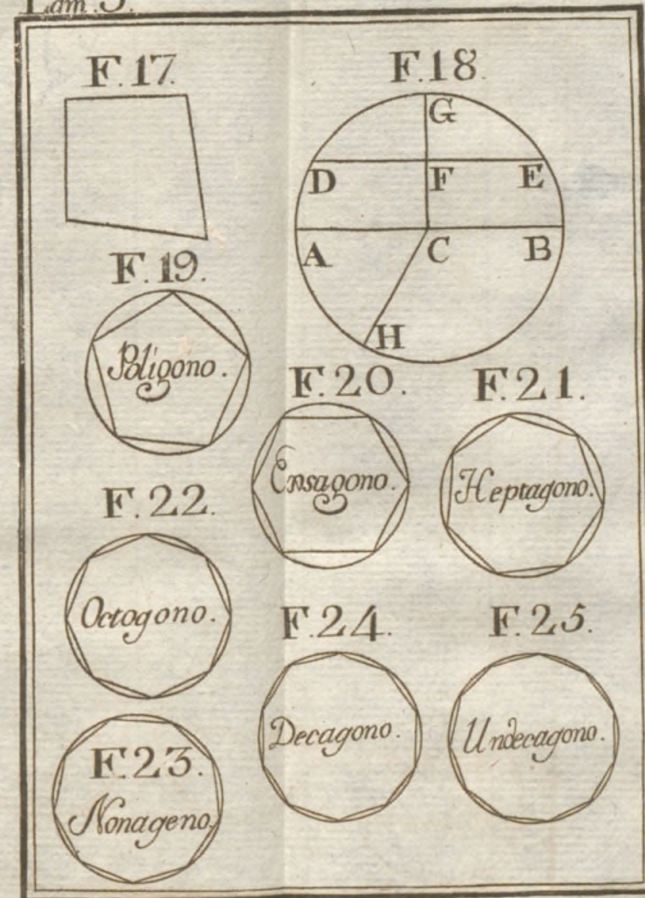




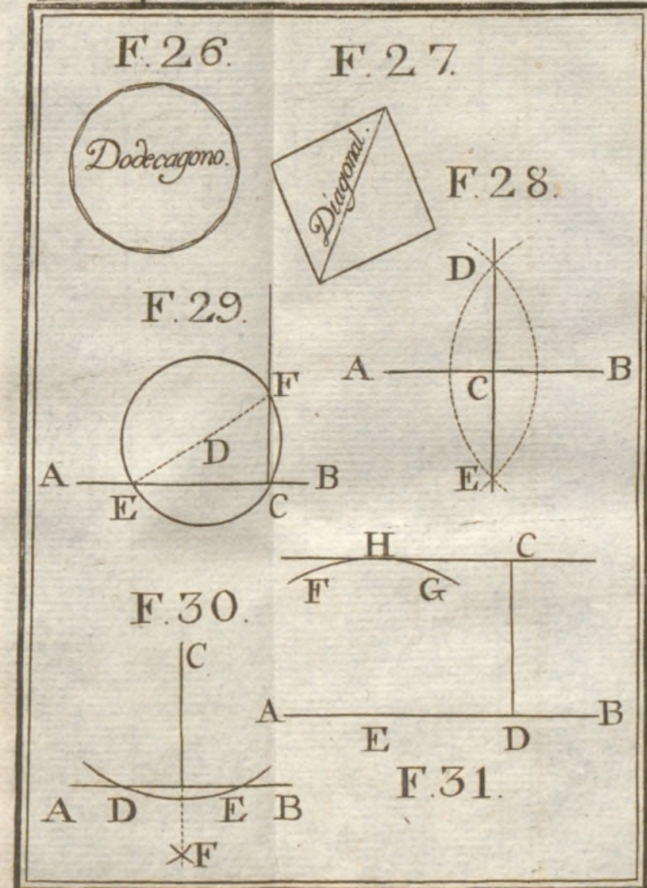
Lam. 2.



Lam. 3.

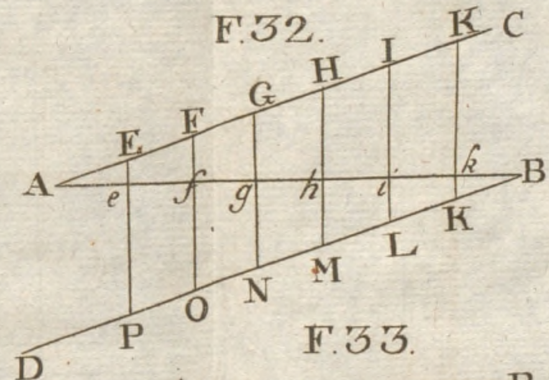

F. 17.
F. 18.
G
D
F
E
A
C
B
H
F. 19.
Poligono.
F. 20.
Ensagono.
F. 21.
Heptagono.
F. 22.
Octogono.
F. 23.
Nonageno.
F. 24.
Decagono.
F. 25.
Undecagono.

Lam. 4.

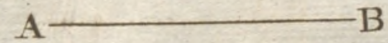

F. 26.
Dodecagono.
F. 27.
Diagonal.
F. 28.
D
A
C
B
E
F. 29.
F
D
A
B
E
C
F. 30.
C
A D
E B
F
H
C
F
G
A
B
E
D
F. 31.

Lam. 5.

F. 32.

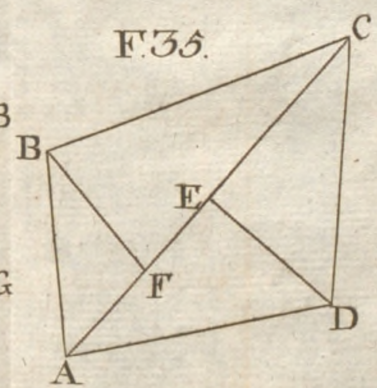


F. 33.

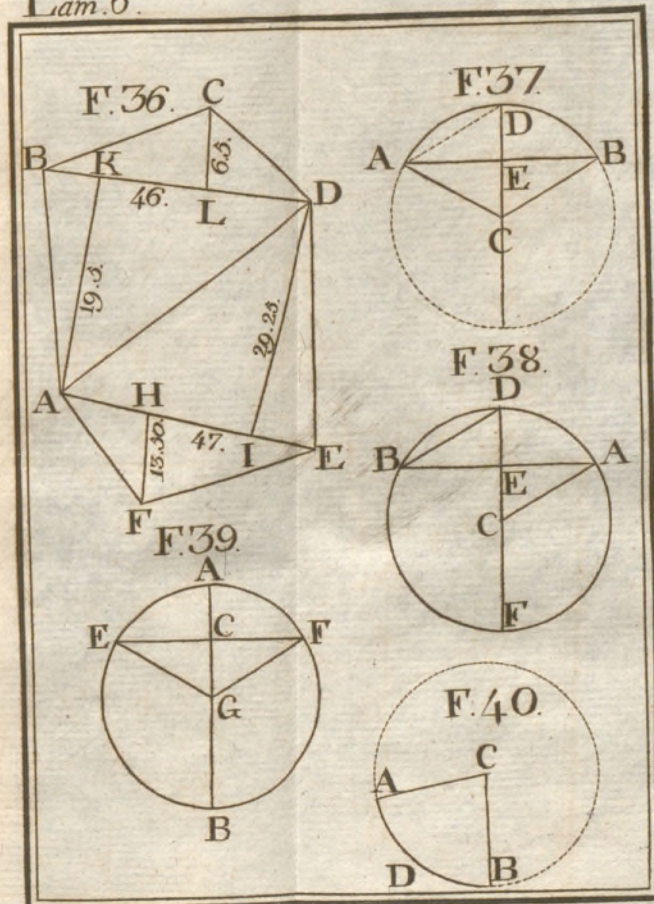


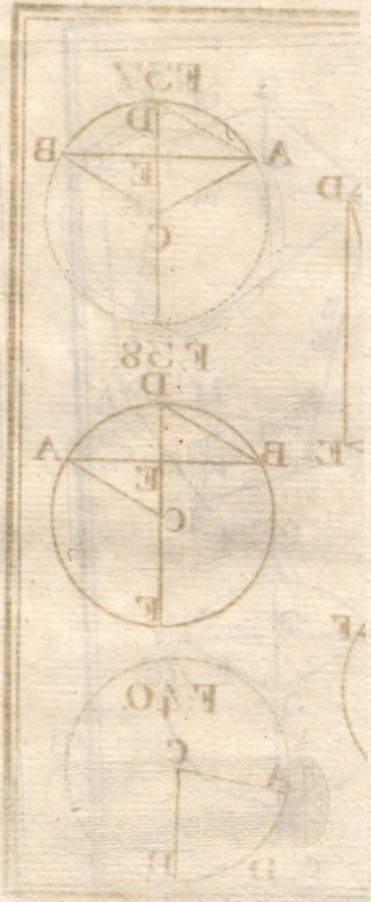
F. 34.

F. 35.

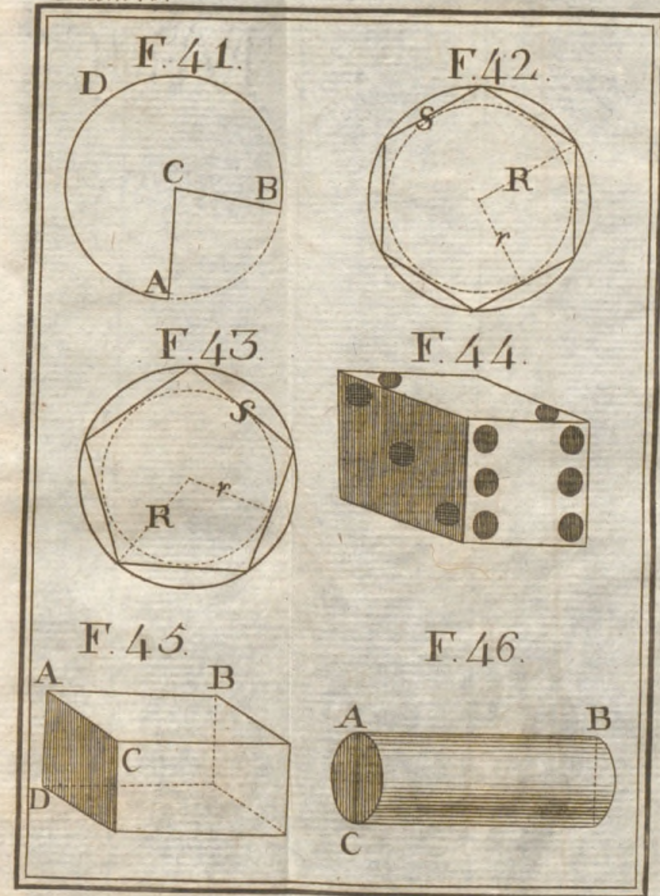


Lam. 6.


F. 36.
C
B
K
6.5.
46.
L
D
19.5.
29.25.
A
H
13.30.
47.
I
E
F
F. 37.
D
A
B
E
C
F. 38.
D
B
A
E
C
F
F. 39.
A
E
C
F
G
B
F. 40.
C
A
D
B

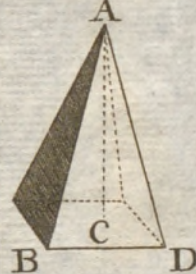


Lam. 7.

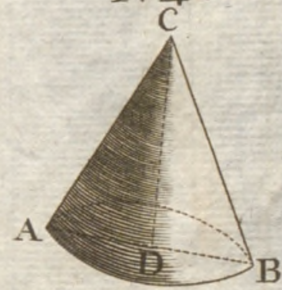


Lam. 8.

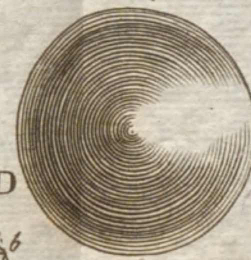
F. 47.



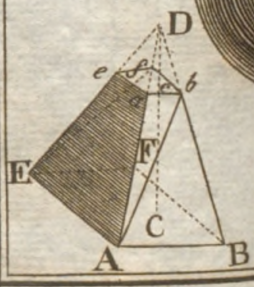
F. 48.



F. 49.



F. 50.



F. 51.